Teoría Electromagnética, 2008
Prof. Máximo Bañados

Interrogación # 3

TIEMPO: 2 horas

1. Considere un anillo de radio a por el cual circula una corriente I. El anillo se encuentra en el plano x/y, localizado en $z = 0$ y con el centro en el origen. El objetivo de este problema es calcular el campo magnético en el punto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ usando

$$\vec{A}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\vec{J}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \; , \qquad\qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{1}$$

Siga las siguiente instrucciones:

(a) Identifique la densidad de corriente $\vec{J}$ apropiada para este problema.

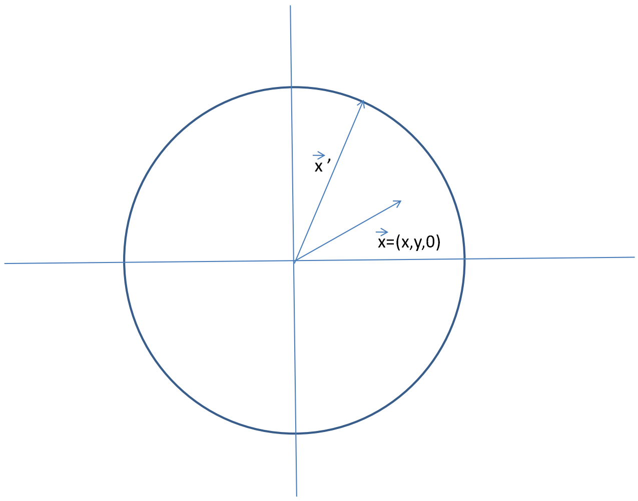
(b) Para calcular $\vec{B}$ en $x = y = z = 0$, no basta con calcular $\vec{A}(x)$ solo en ese punto. Debemos evaluarlo en un punto $(x, y, 0)$. ¿Porque? ¿Porque no es necesario desplazarse por el eje z? Demuestre que para x, y muy pequeños se tiene

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \simeq \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{a}(x\cos\phi' + y\sin\phi')\right) \tag{2}$$

donde $\vec{x}'$ es un punto sobre la espira, con ángulo ϕ', y $\vec{x}$ tiene coordenadas $(x, y, 0)$. Ver dibujo.

(c) calcule la integral, obtenga $\vec{A}(x)$ y luego calcule $\vec{B}(0, 0, 0)$.

(d) (Opcional) Este cálculo se puede hacer en forma trivial calculando directamente $\vec{B}$. Compare su resultado.



2. La carga eléctrica $Q = \int d^3x\, \rho(x)$ se conserva. Esto significa que la densidad de carga y corriente satisfacen,

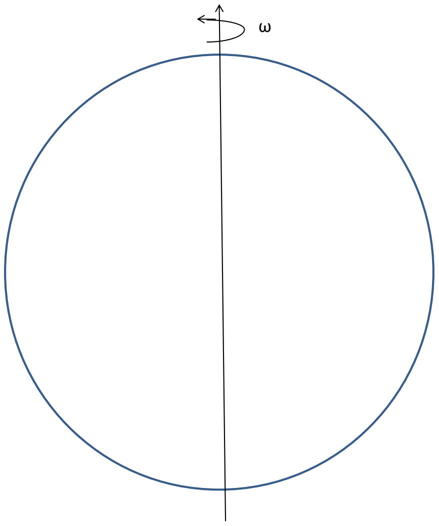
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \tag{3}$$

La energía $U = \int d^3x\, u(x)$ también se conserva. La densidad de energía y corriente del campo electromagnético son

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right), \qquad \vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \tag{4}$$

Usando las ecuaciones de Maxwell en el vacio demuestre la ec. de continuidad.

3. Considere un anillo de radio a, con una distribución uniforme de carga λ. El anillo rota como indica la figura con velocidad angular ω. Determine el momento magnético $\vec{m}$ de este sistema.



Ayudas:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi) d\phi = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \sin(\phi)\cos(\phi) d\phi = 0 \tag{5}$$

En coordenadas polares planas

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\, \hat{x} + \cos\phi\, \hat{y} \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}} \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \tag{8}$$