Relatividad General FIZ3150.
Tarea 4.

Profesor: Máximo Bañados*. Ayudantes: Mauricio Ipinza** y Simón Riquelme***

Fecha de entrega: 21 de Noviembre, 2007.

Problema 1 .

(a) Muestre que bajo la transformación infinitesimal $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$ ($\xi \ll 1$) la variación de la métrica es

$$\delta g_{\mu\nu}(x) \equiv g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = -(\xi^{\rho} g_{\mu\nu,\rho} + \xi^{\rho}{}_{,\mu} g_{\rho\nu} + \xi^{\rho}{}_{,\nu} g_{\mu\rho}).$$

Los vectores ξ^{μ} que satisfacen la ecuación (de Killing)

$$\xi^{\rho} g_{\mu\nu,\rho} + \xi^{\rho}{}_{,\mu} g_{\rho\nu} + \xi^{\rho}{}_{,\nu} g_{\mu\rho} = 0$$

son llamados vectores de Killing, y definen simetrías de la métrica ($\delta g_{\mu\nu}(x) = 0$).

(b) Pruebe que si ξ^{μ} es un vector de Killing, entonces

$$Q = g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \xi^{\nu}$$

es una constante de movimiento (se conserva sobre las geodésicas).

(c) Demuestre que la métrica de Schwarszchild tiene dos vectores de Killing y que las cantidades conservadas asociadas a estos son la energía y el momentum angular.

Problema 2 .

Considere la métrica plana en 4 dimensiones:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Haciendo la transformación de coordenadas $u = x + t$; $v = x - t$, se obtiene:

$$ds^2 = dudv + dy^2 + dz^2.$$

Considere la siguiente deformación de esta métrica

$$ds^2 = dudv + H(u, y, z)du^2 + dy^2 + dz^2.$$

Encuentre las restricciones que debe satisfacer la función $H(u, y, z)$ de modo que esta métrica sea solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Interprete esta solución y haga ver que representa una onda gravitacional que viaja sin deformarse (*pp-wave*).

Problema 3 .

Se pide encontrar la solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío en 4 dimensiones para el ansatz

$$ds^2 = -dt^2 + \phi_1(t)^2 dx_1{}^2 + \phi_2(t)^2 dx_2{}^2 + \phi_3(t)^2 dx_3{}^2. \tag{1}$$

---

* maxbanados@fis.puc.cl
** mauricioipinza@gmail.com
*** sdriquel@uc.cl