

Relatividad General FIZ3150.

Tarea 3.

Profesor: Máximo Bañados*. Ayudantes: Mauricio Ipinza** y Simón Riquelme***

Fecha de entrega: 17 de Octubre, 2007.

Problema 1 .

Considere un vector en \mathbb{R}^2 el cual es transportado paralelamente sobre un círculo unitario. El transporte paralelo en el sentido cartesiano, y las coordenadas del vector V^x, V^y claramente no cambian. Ahora, en coordenadas polares, la base $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ cambia de punto a punto y por lo tanto las coordenadas polares del vector cambiarán al hacer el transporte paralelo. Resuelva las ecuaciones $\delta V^\mu = -\Gamma^\mu_{\rho\lambda} V^\rho \delta x^\lambda$ para el camino particular $\delta x^\mu = \delta\theta$. Muestre que la solución tiene la forma $V^\theta = A \cos(\theta + \alpha), V^r = A \sin(\theta + \alpha)$. Interprete éste resultado y muestre con un dibujo que el vector efectivamente es transportado paralelamente en el sentido cartesiano. Considere los valores $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ y comente.

Problema 2 .

- (a) Sea A una matriz diagonalizable. Demuestre que $\det[A] = e^{\text{Tr}[\ln A]}$
- (b) Demuestre que $\Gamma^\mu_{\nu\mu} = \partial_\nu \ln \sqrt{g}$
- (c) Demuestre que

$$A^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} A^\mu)$$

Encuentre una expresión para el Laplaciano $\phi^{;\mu}{}_{;\mu}$ que no involucra explícitamente el símbolo de Christoffel.

- (d) Considere la métrica del espacio \mathbb{R}^3 en coordenadas esféricas. Usando el resultado anterior, encuentre la conocida expresión para el Laplaciano en dichas coordenadas.

Problema 3 .

Resuelva explícitamente la ecuación de geodésicas para el plano en coordenadas polares

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0,$$

con

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r.$$

Se pide la expresión $r = r(\theta)$. Muestre que ésta curva efectivamente define la recta.

* maxbanados@fis.puc.cl

** mauricioipinza@gmail.com

*** sdriquel@uc.cl