

# Relatividad General FIZ3150.

## Tarea 1.

Profesor: Máximo Bañados\*. Ayudantes: Mauricio Ipinza\*\* y Simón Riquelme\*\*\*

*Fecha de entrega: 5 de Septiembre, 2007.*

### Problema 1 .

Considere la base canónica de  $\mathfrak{R}^2$ ,  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , y tres tensores de componentes

$$\begin{aligned} T_1 = T_{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ T_2 = T^i_j &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ T_3 = T^{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si hacemos un cambio de base de la forma

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \end{aligned}$$

¿Cuáles son los valores de dichos tensores en la nueva base?.

### Problema 2 .

¿Cuáles son las componentes de  $t = \vec{e}_i \otimes \tilde{\omega}^i$ ?, ¿Dependen de la base?.

Considere ahora el tensor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \vec{e}_i \otimes \tilde{\omega}^i - \vec{v} \otimes \tilde{v}, \quad \text{con } \tilde{v}(\vec{v}) = 1,$$

donde  $\vec{v}$  es un vector arbitrario restringido a tener norma 1.

(a) Calcule  $P^2 = P(P)$

(b) Calcule  $P(\vec{v})$

¿Qué puede concluir acerca de este tensor  $P$ ?

---

\* maxbanados@fis.puc.cl

\*\* mauricioipinza@gmail.com

\*\*\* sdriquel@uc.cl

**Problema 3 .**

Sean

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$Q'_{ij} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

Considerando el cambio de base del problema 1, calcule  $T^{ij}Q_{ij}$ .

**Problema 4 .**

Considere la siguiente situación: En el sur de Chile existe un túnel mucho más corto que la longitud estandar de de los trenes que transportan madera. Durante una tormenta terrible, don Nicolás, un maquinista de experiencia, tiene una brillante idea para salvar su carga de la pudrición. Recordando los viejos libros de Relatividad que lee en sus tiempos de ocio, le comentó a su ayudante don Jorge, que cree posible salvaguardar su tren de 100 mts. de largo en el túnel de tan sólo 50. Para llevar a cabo el plan, don Jorge simplemente esperará a un lado del túnel hasta que se produzca el “milagro” de que exactamente el tren esté contenido en éste, cerrando las puertas de ambos lados simultáneamente.

- (a) ¿Bajo qué condiciones se puede salvar la madera desde el punto de vista de don Jorge?
- (b) ¿Qué sucederá desde el punto de vista de don Nicolás a medida que se acerca al túnel?
- (c) Explique en qué sentido surge una “paradoja” relativista y explique cómo se soluciona a través de diagramas de espacio-tiempo para cada uno de los observadores involucrados.