**Relatividad y Gravitación, 2002/2**
**Prof. Máximo Bañados**

# Tarea # 5 - Formas Diferenciales

Fecha Entrega: 6/11 (en ayudantía)

**Preámbulo:**

En esta tarea usaremos la siguiente notación para la base de 1-formas:

$$\tilde{w}^\alpha \equiv dx^\alpha,$$

una 1-forma tendrá la forma general $\alpha = \alpha_\mu dx^\mu$. Además omitiremos el tilde, $\tilde{\alpha}$, sobre las formas.

Las q-formas diferenciales son tensores del tipo $(0\ q)$ completamente antisimétricos. Una base natural para q-formas se puede construir como sigue. Definamos el producto, $\wedge$, entre 1-formas:

$$dx^\alpha \wedge dx^\beta := dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha.$$

$dx^\alpha \wedge dx^\beta$ es entonces una base de las 2-formas: $\beta = (1/2)\beta_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$ donde $\beta_{\mu\nu} = -\beta_{\nu\mu}$. Del mismo modo, definimnos la base de 3-formas

$$dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma := dx^{[\alpha} \otimes dx^\beta \otimes dx^{\gamma]}$$

donde $[\alpha, \beta, \gamma]$ indica que hay que sumar $3! = 6$ términos para que $dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma$ sea completamente antisimétrico. Una 3-forma entonces es $\alpha = (1/3!)\alpha_{\mu\nu\rho}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho$ con $\alpha_{\mu\nu\rho}$ completamente antisimétrico.

Sean $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$ los símbolos de Christoffel. Definimos una 1-forma $\Gamma^\mu{}_\nu = \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} dx^\rho$. Para cada valor de $\mu\nu$, $\Gamma^\mu{}_\nu$ es una 1-forma. Ahora definimos la 1-forma derivada covariante, $\nabla = d + \Gamma$, la cual actúa sobre tensores. ($d$ es la 1-forma gradiente.) Por ejemplo, sobre las componentes de un vector y una 1-forma:

$$\nabla V^\mu = dV^\mu + \Gamma^\mu{}_\nu V^\nu,$$

$$\nabla \alpha_\mu = d\alpha_\mu - \Gamma^\nu{}_\mu \alpha_\nu,$$

respectivamente. Note la consistencia de esta notación con las definiciones usuales. Por ejemplo, para las componentes de un vector: $\nabla V^\mu = (\partial_\nu\, V^\mu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} V^\lambda) dx^\nu$.

**Problemas:**

**NOTA**: Los problemas **1,2,3,10** y **11**, escenciales para entender el resto, serán resueltos en la ayudantía del 30/10. **Los problemas 4-9 son de tarea.**

1. Demuestre que $d \wedge d\, H = 0$, donde $H$ es cualquier campo tensorial diferenciable. En particular, note que $d \wedge dx^\mu = 0$.

2. Sean $\alpha$ y $\beta$ dos 1-formas con components $\alpha_\mu, \beta_\nu$, respectivamente. Calcule las componentes $\omega_{\mu\nu}$ de $\omega := \alpha \wedge \beta$ en la base de 2-formas $dx^\mu \wedge dx^\nu$. Demuestre que $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$.

3. Sea $\alpha$ una 1-forma, y $\beta$ una 2-forma. Demuestre que $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$.

4. Sean $\alpha$ y $\beta$ dos 1-formas. Demuestre la regla de Leibnitz

$$d \wedge (\alpha \wedge \beta) = (d \wedge \alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge (d \wedge \beta)$$

   Escriba la regla correspondiente cuando $\alpha$ es una 2-forma, y $\beta$ es una 1-forma.

5. Sea $\alpha$ una q-forma, demuestre que $\nabla \wedge \alpha = d \wedge \alpha$. Considere solo $q = 1, 2$. (Observación: actuando sobre q-formas, la derivada covariante es igual a la derivada ordinaria.)

6. Escriba $\nabla V^{\mu\nu}$ en términos de $d$ y $\Gamma^{\mu}{}_{\nu}$.

7. Sea $R^{\mu}{}_{\nu} := d \wedge \Gamma^{\mu}{}_{\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha} \wedge \Gamma^{\alpha}{}_{\nu}$ la 2-forma curvatura. Definimos sus componentes mediante $R^{\mu}{}_{\nu} = (1/2) R^{\mu}{}_{\nu\,\lambda\rho}\, dx^{\lambda} \wedge dx^{\rho}$. Demuestre que ellas coinciden con la definición de curvatura dada en clase.

8. Demuestre las identidades de Bianchi:

$$(i) \quad R^{\mu}{}_{\nu} \wedge dx^{\nu} = 0, \qquad (ii) \quad \nabla \wedge R^{\mu}{}_{\nu} = 0.$$

   Argumente que estas identidades son las mismas vistas en clase.

9. Demuestre que $\nabla \wedge \nabla V^{\mu} = R^{\mu}{}_{\nu} V^{\nu}$

10. Considere la integral sobre el plano $I = \int f(x, y)\, dx \wedge dy$ (notar el producto $\wedge$). Defina las coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ y demuestre que la integral en coordenadas polares es $I = \int f(r, \theta)\, r\, dr \wedge d\theta$, sin tener que usar un Jacobiano. Generalize esta idea para un cambio de coordenadas arbitrario.

11. Considere la métrica de una esfera, $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\phi^2$. Encuentre los símbolos de Christoffel, y escriba la 1-forma $\Gamma^{\mu}{}_{\nu}$. Encuentre la 2-forma curvatura $R^{\mu}{}_{\nu}$ y derive todas las componentes del tensor de curvatura. (Observación: Este es el método más rápido conocido para calcular $R$.)