Relatividad y Gravitación, 2002/2
Prof. Máximo Bañados

Tarea # 4

Fecha Entrega: 23/10

1. Considere la siguiente métrica en tres dimensiones (y coordenadas $\{t, r, \phi\}$) :

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2\, d\phi^2$$

(a) Calcule todos los símbolos de Christoffel distintos de cero.
(b) Defina el tensor $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}$ y calcule todas las componentes no nulas.

2. (a) Demuestre que si g es el determinante de $g_{\mu\nu}$ entonces $\partial_\mu g = g g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu}$.

(b) Demuestre $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu \sqrt{-g}$, y por lo tanto $V^{\mu}_{\ ;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}V^\mu)$

(c) En coordenadas polares en tres dimensiones considere el vector $V^r = r, V^\theta = 0, V^\phi = 1$, y calcule su divergencia,

3. Considere la ecuación $V^{\mu}_{\ ;\nu} = 0$. Demuestre que exigiendo que las derivadas parciales commuten, $V^{\alpha}_{\ ,\mu,\nu} = V^{\alpha}_{\ ,\nu,\mu}$, implica $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}V^\nu = 0$ donde el tensor de curvatura R fue definido en el ejercicio 1. ¿Existen soluciones (no nulas) de la ecuación $V^{\mu}_{\ ;\nu} = 0$ para cualquier métrica $g_{\mu\nu}$?.