Relatividad General
Tarea 4
18 de Octubre

Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Ernesto Frodden, efrodden@uc.cl
Fecha de entrega: Lunes 8 de Noviembre.

---

1. Para la métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas, muestre que si transforma la coordenada radial de r a r' según

$$r = r'\left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^2$$

la métrica de Schwarzschild toma la forma

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - M/2r'}{1 + M/2r'}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^4 \left(dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)\right)$$

Este nuevo sistema de coordenadas es llamado isotrópico puesto que la parte espacial de la métrica es una función de r' por la métrica plana, la métrica Euclidiana tridimensional no tiene ninguna dirección privilegiada.

2. Una nave orbita circularmente un hoyo negro sin encender sus motores. La nave se encuentra a un radio de $r = 7M$

   a) ¿Cuál es el período de la órbita medido por un observador lejano?

   b) ¿Cuál es el período de la órbita medido por un reloj a bordo?

   nota: use $G = c = 1$. seba larco. marie tere laurant

3. Suponga una métrica casi plana de la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad \text{con } |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

   a) Encuentre la ecuación de Einstein para la pertubación $h_{\mu\nu}$.
   Indicación: note que $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2)$.

   b) Reescriba la ecuación usando una nueva variable $\overline{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\gamma}{}_{\gamma}$.

   c) Reescriba una vez más la ecuación, ahora usando la *condición de Hilbert*

$$\overline{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

   Interprete la ecuación resultante.
   ¿Porqué cree que está permitido imponer estas condiciones?.

4. Muestre que cualquier vector de Killing es una solución de

$$\xi^{\nu;\lambda}{}_{;\lambda} + R^{\nu}{}_{\sigma}\xi^{\sigma} = 0,$$

encuentre un principio variacional desde el cual esta ecuación pueda ser derivada.
Ayuda: use el conmutador $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$, también le puede servir recordar la acción para el campo electromagnético $F_{\mu\nu}$.

5. Muestre que en dos dimensiones la métrica es *conforme plana*, esto es, siempre se puede expresar según

$$ds^2 = e^{\phi(t,x)}\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}.$$

"Do not Bodies act upon Light at a distance, and by their action bend its Rays, and is it not this action (*caeteris paribus*) strongest at the least distance?"
Isaac Newton: Opticks, Query 1.