Relatividad General
Tarea 3

27 de Septiembre

Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Ernesto Frodden, efrodden@uc.cl
Fecha de entrega: Lunes 11 de Octubre.

---

1. Encuentre las conexiones para el sistema de coordenadas esféricas habitual (r, θ, ϕ) en términos de la regla del transporte paralelo. Como se vi en ayudantía, el diferencial de línea es $ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2)$.

   a) Compárelos con las conexiones obtenidas de los símbolos de Christoffel.

   b) Compruebe que $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$.

   c) Calcule los tensores de Riemann y de Ricci así como el escalar de curvatura.

   d) Usando lo anterior determine las geodésicas sobre una esfera de radio unitario.

2. Considere la siguiente métrica en tres dimensiones

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

   a) Encuentre el lagrangiano para el principio variacional que produce las geodésicas en este espacio-tiempo.

   b) Use el resultado anterior para escribir las componentes de la ecuación geodésica calculándolas desde el lagrangiano.

   c) Identifique explícitamente los símbolos de Christoffel para esta métrica del resultado de b).

   d) Defina el tensor $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = 2\Gamma^\mu{}_{\nu[\beta,\alpha]} + 2\Gamma^\mu{}_{\sigma[\alpha}\Gamma^\sigma{}_{\nu|\beta]}$ y calcule todas sus componentes (no olvide usar las simetrías disponibles).

3. Use el tensor de Levi-Civita y pruebe la identidad de Bianchi

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma;\nu} + R_{\alpha\delta\nu\beta;\gamma} + R_{\alpha\delta\gamma\nu;\beta} = 0$$

4. Demuestre que al hacer una transformación entre dos bases coordenadas, asociadas con x^μ y y^μ, las componentes de la derivada covariante transforma como un tensor. Esto es

$$T'^\mu{}_{;\nu} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}T^\alpha{}_{;\beta}.$$

a) Primero asuma que x^α es localmente un sistema cartesiano, i. e. $g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$, y muestre la transformación anterior.

b) Use la regla de la cadena para mostrar que la regla se aplica a todo sistema de coordenadas.

5. Dado $y = g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$, muestre que, en general, extremar la acción

$$S_F = \int F(y)ds$$

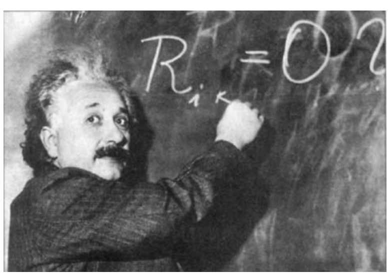
produce las mismas ecuaciones que minimizan el funcional $S = \int \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}$.

6. Considere el espacio-tiempo bidimensional con elemento de línea

$$ds^2 = -X^2dT^2 + dX^2.$$

Encuentre la forma $X(T)$ de todas las geodésicas tipo tiempo en este espacio.

7. Principio de Equivalencia:
Experimentos en una laboratorio en caída libre que sea suficientemente pequeño y realizados duante un tiempo suficientemente corto, entregará resultados indistinguibles a los entregados por el mismo experimento en un sistema inercial.
A partir de la enunciación anterior del principio argumente porque la luz debe *caer* en el campo gravitacional de la tierra.



In 1943 Einstein, Gödel, Bertrand Russell, and Pauli gathered at Einstein's home to discuss philosophy of science about half a dozen times. *'Science without epistemology is —in so far as it is thinkable at all— primitive and muddled,'* he wrote in his later years, warning at the same time of the dangers to the scientist of adhering too strongly to any one epistemological system.
(from 'Subtle is the Lord' by Abraham Pais, p.13)