

RELATIVIDAD GENERAL

TAREA 1

16 de Agosto

Profesor: Máximo Bañados

Ayudante: Ernesto Frodden

Fecha de entrega: Lunes 30 de Agosto.

-
1. Sea S' un sistema de referencia que se mueve respecto a S con velocidad v paralela al eje x . En S' una partícula se mueve a velocidad $\vec{u}' = u'_x \hat{x}' + u'_y \hat{y}'$. Encuentre la velocidad \vec{u} que se mide en S .

2. Considere el funcional

$$S[x(t)] = \int_0^T [\dot{x}^2(t) + x^2(t)] dt.$$

Encuentre la curva $x(t)$ que satisface las condiciones: $x(0) = 0$ y $x(T) = 1$, y que además extremiza $S[x(t), \dot{x}(t)]$.

¿Cuál es el valor de S en ese extremo?

¿Es un máximo o un mínimo?

3. Use la notación de Einstein para probar las siguientes identidades del cálculo vectorial

a) $\nabla \cdot (fA) = A \cdot \nabla f + f \nabla \cdot A$

b) $\nabla \times (\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$

c) $\nabla(A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$

d) $\nabla \times (A \times B) = A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B$

4. El momentum de un fotón se puede describir con un cuatrivector. Si el fotón se mueve en el eje x con una frecuencia w según un observador O entonces las componentes de este vector son

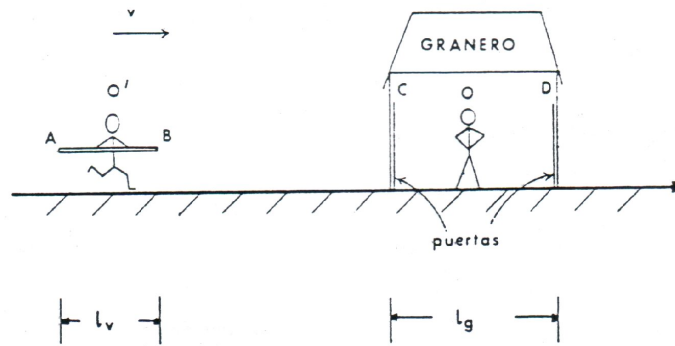
$$\vec{p} = p^\mu \vec{e}_\mu, \quad p^\mu = \hbar w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine el módulo del vector.

b) Determine la frecuencia w' medida por un observador a velocidad relativa v de O . Interprete el resultado.

5. **Paradoja del Granero:** consideremos una vara y un granero de longitudes en reposo l_v y l_g tal que $l_v > l_g$, denotamos los extremos de la vara por A y B y las dos puertas del granero por C y D . Un corredor toma

la vara y se acerca al granero a una gran velocidad v cercana a la velocidad de la luz. Desde el punto de vista de un observador sobre el granero (granjero), la vara sufre una contracción de Lorentz tal que cabe dentro del granero $l'_v < l_g$, cuando A alcanza C el granjero cierra las puertas C y D quedando la vara contenida en el granero, luego, antes que el corredor choque con la puerta D el granjero la abre y el corredor sale. Sin embargo desde el punto de vista del corredor es el granero el que se contrae! y por lo que es imposible que la vara quepa dentro del granero. Use diagramas espacio-tiempo para resolver la aparente paradoja. Encuentre la velocidad mínima a la que debe correr quien lleva la vara. (Este problema aparece tratado en diversos libros, si usa alguno cítelo!).



6. Considere la transformación de coordenadas

$$x = \mu\nu, \quad y = \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2),$$

donde (x, y) son coordenadas cartesianas.

- Dibuje o grafique curvas con μ constante y con ν constante en el plano xy .
 - Expresé el elemento de línea $ds^2 = dx^2 + dy^2$ en las nuevas coordenadas.
 - ¿Las curvas con μ constante y ν constante se intersectan en ángulos rectos?
 - Encuentre la ecuación del círculo de radio r centrado en el origen en términos de μ y ν .
7. Debido a la rotación la superficie de la tierra es una esfera levemente achatada en los polos. El radio polar es de 6357 km , mientras que el ecuatorial es de 6378 km . Suponga que la superficie de la tierra es modelada por una métrica con un eje de simetría que produce un elemento de línea infinitesimal

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = a^2 (d\theta^2 + f^2(\theta)d\phi^2),$$

con la función

$$f(\theta) = \text{sen } \theta(1 + \epsilon \text{sen}^2 \theta),$$

para un ϵ pequeño.

Imagine a la tierra como un elipsoide de revolución y compare los perímetros. ¿Qué valores para a y ϵ reproducen mejor los radios polares y ecuatoriales conocidos?



“My religion consists of a humble admiration of the illimitable superior spirit who reveals himself in the slight details we are able to perceive with our frail and feeble mind.”

(Albert Einstein)