PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Facultad de Física
Instituto de Física

Tarea 2

Relatividad y Gravitación

Profesor: Máximo Bañados

Ayudante: Cristóbal Armaza (cyarmaza@uc.cl)

- Puede desarrollar sus respuestas a mano o en formato digital.
- **Plazo de entrega: 6 de octubre durante la cátedra.**
- Una tarea ordenada hace a un corrector feliz.

Problemas a resolver

Problema 1. En el espacio Euclídeo de tres dimensiones, la ecuación cartesiana $z = x^2 + y^2$ define un paraboloide de rotación.

(a) Si cada punto sobre el paraboloide es etiquetado por sus coordenadas cartesianas (x, y), entonces el elemento de línea sobre esta superficie es

$$ds^2 = (1 + 4x^2)\, dx^2 + (1 + 4y^2)\, dy^2 + 8xy\, dx\, dy.$$

Muestre que, en este sistema coordenado, existe un punto, *y sólo* un punto, en torno al cual el sistema coordenado cartesiano constituye un *sistema localmente plano*. Esto es, muestre que existe un punto O sobre el paraboloide, tal que

$$g_{\mu\nu}\big|_O = \eta_{\mu\nu}, \qquad \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}\big|_O = 0,$$

y en general $g_{\mu\nu,\alpha\beta}\big|_O \neq 0$.

(b) Alternativamente, el paraboloide se puede describir por coordenadas cilíndricas $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Obtenga las componentes del tensor métrico en esta nueva base. ¿Es la nueva base ortogonal? ¿Es ortonormal? ¿Constituye este sistema coordenado un sistema localmente plano en algún punto?

(c) Obtenga las conexiones en la base cilíndrica, y escriba explícitamente las derivadas de los vectores base con respecto a las coordenadas. Interprete su resultado en términos de cambio de longitud o dirección de los vectores base.

Problema 2. Considere el cambio de coordenadas en el espacio Euclídeo tridimensional (x, y, z) dado por

$$x = a\frac{\sinh\tau\ \cos\phi}{\cosh\tau - \cos\sigma}, \qquad y = a\frac{\sinh\tau\ \sin\phi}{\cosh\tau - \cos\sigma}, \qquad z = a\frac{\sin\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma},$$

en donde a es constante.

(a) Encuentre los vectores base del sistema coordenado (σ, τ, ϕ), en términos de la base cartesiana.

(b) Encuentre la métrica en el sistema coordenado (σ, τ, ϕ).

(c) Encuentre las derivadas de los vectores base de (a) con respecto a las coordenadas (σ, τ, ϕ).

(d) (BONUS) Encuentre el Laplaciano de un campo escalar ϕ en las coordenadas (σ, τ, ϕ) (ver problema siguiente, último inciso).

Problema 3. Si S es un campo escalar arbitrario, A^μ es un campo vectorial arbitrario, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, $g = \det(g_{\mu\nu})$, y $\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}$ es la conexión, probar las siguientes identidades:

(a) $g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma}$, con $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \equiv g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}$

(b) $g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = -\Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}g^{\mu\beta} - \Gamma^\beta{}_{\mu\gamma}g^{\mu\alpha}$

(c) $g_{,\alpha} = -g g_{\beta\gamma}g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha} = g g^{\beta\gamma}g_{\beta\gamma,\alpha}$

(d) $\Gamma^\alpha{}_{\alpha\beta} = \left(\ln\sqrt{|g|}\right)_{,\beta}$

(e) $A^\alpha{}_{;\alpha} = |g|^{-1/2}\left(|g|^{1/2}A^\alpha\right)_{,\alpha}$ (divergencia del campo vectorial A^μ)

(f) $S_{;\alpha}{}^{;\alpha} = |g|^{-1/2}\left(|g|^{1/2}g^{\alpha\beta}S_{,\beta}\right)_{,\alpha}$ (laplaciano del campo escalar S), con $V_\mu{}^{;\alpha} \equiv g^{\alpha\nu}V_{\mu;\nu}$

Problema 4. Debido a su rotación, la superficie de la Tierra es una esfera levemente achatada en los polos. Suponga que la superficie de la Tierra es modelada por una métrica con un eje de simetría que produce un elemento de línea

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + f^2\, d\phi^2)$$

en donde $f = \sin\theta(1 + \epsilon\sin^2\theta)$, ϵ siendo un parámetro adimensional pequeño. ¿Qué valores para a y ϵ reproducen mejor los radios polar y ecuatorial conocidos? Dato: radio polar de la Tierra: 6357 km. Radio ecuatorial de la Tierra: 6378 km.

Problema 5. Sobre la superficie de una esfera unitaria, el vector $\vec{A}$ es igual a $\vec{e}_\theta$ en el punto $\theta = \theta_0$, $\phi = 0$. ¿Qué es $\vec{A}$ después de que es transportado paralelamente sobre el círculo $\theta = \theta_0$? ¿Cuál es la magnitud de $\vec{A}$?