Relatividad y Gravitación, 2004
Prof. Máximo Bañados, Ayudantes: Tomás Andrade y Alberto Faraggi

Interrogación # 3

TIEMPO: 2 horas

1. A y B quieren verificar la predicciones de la Relatividad General. A está en la Tierra y emite fotones *radialmente* hacia arriba con una frecuencia ν_A. B está en el techo de una torre **muy** alta, a una distancia r_B del centro de la Tierra, y observa que los fotones llegan arriba con una frecuencia ν_B. Con satisfacción comprueba el corrimiento hacia el rojo de ν_B con respecto a ν_A. Para probar otros aspectos de la teoría se incorpora C, quien se lanza en caída libre (con velocidad inicial cero) desde lo alto de la torre. Sea ν_C la frecuencia que mide C en el instante en que se encuentra a una distancia r_C del centro de la Tierra. Si la métrica que describe la geometría de este problema es

$$ds^2 = -f^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f^2(r)} + r^2 d\Omega^2$$

obtenga una fórmula para ν_C/ν_B en función de $f(r_C)$ y $f(r_B)$.

Indicaciones. (i) Recuerde que si ξ es un vector de Killing, entonces $g_{\mu\nu}p^\mu\xi^\nu$ es conservado para cualquier partícula/fotón que se mueva libremente. (ii) Determine la 4-velocidades de B y C. En el caso de C use las cantidades conservadas del problema y ajuste las condiciones iniciales apropiadamente. (iii) Determine el 4-momentum del fotón propagándose en la métrica anterior. Recuerde que para el fotón $E = h\nu$ y $p^2 = 0$. (iv) Recuerde que $E = -u^\mu p_\mu$.

2. (a) Escriba la métrica de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein $\{v, r, \theta, \phi\}$ donde v se relaciona con la coordenada t de acuerdo a

$$t = v - r - 2M \log\left|\frac{r}{2M} - 1\right|.$$

Demuestre que en las nuevas coordenadas el punto $r = 2M$ es completamente regular, i.e., demuestre que no hay singularidades y que la métrica es invertible.

(b) Analice las geodésicas de un fotón radial ('conos de luz') en las nuevas coordenadas. Encuentre las funciones $v(r)$ para un fotón que se acerca al agujero negro, y uno que se aleja. Ayuda: $\int \frac{dx}{1-\frac{a}{x}} = x + a\log|x-a|$.

(c) **Problema opcional:** Demuestre que una vez que se ha sobrepasado el punto $r = 2M$, los conos de luz se orientan hacia el centro del agujero negro. ¿Que significa esto?

3. Considere una partícula puntual relativista de masa m y 4-momentum p^μ. Queremos considerar esta partícula como fuente de un campo gravitacional. En analogía con el eletromagnetismo[1] definimos la densidad de 4-momentum $T^{\mu 0}(\vec{r}) = p^\mu \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}(t))$, y la corriente de 4-momentum $T^{\mu i}(\vec{r}) = p^\mu \frac{dx^i}{dt}\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}(t))$, donde $\vec{r}(t)$ es el vector posición de la partícula.

(a) Demuestre que $T^{\mu\nu}$ se puede escribir en forma explícitamente simétrica: $T^{\mu\nu} = a^\mu a^\nu \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}(t))$. ¿Cuanto vale a^μ?

(b) En el sistema en que la partícula está en reposo, escriba $T^{\mu\nu}$ en la forma de un fluído ideal. Determine cuento vale la presión p y la densidad ρ.

[1] Una carga puntual q tiene asociada una "densidad de carga" $j^0(\vec{r}) = q\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}(t))$ y una corriente $j^i = q\frac{dx^i}{dt}\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}(t))$.