Relatividad y Gravitación, 2002/2
Prof. Máximo Bañados

Interrogación # 3

TIEMPO: 2 horas y 30 minutos

En los problemas (1) y (2) de esta interrogación se usará la métrica,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{1}$$

cuyos símbolos de Christofel distinton de cero son (' := d/dr),

$$\Gamma^r{}_{tt} = (1/2)f(r)f'(r), \quad \Gamma^t{}_{tr} = (1/2)f'(r)/f(r), \quad \Gamma^r{}_{rr} = -(1/2)f'(r)/f(r), \tag{2}$$

$$\Gamma^\theta{}_{r\theta} = 1/r, \quad \Gamma^\phi{}_{r\phi} = 1/r, \quad \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -rf(r) \tag{3}$$

$$\Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \cos\theta/\sin\theta, \quad \Gamma^r{}_{\phi\phi} = -f(r)r\sin^2\theta \quad \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \tag{4}$$

y las componentes independientes de la curvatura distintas de cero son (recuerde las simetrías de $R^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho}$):

$$R^{tr}{}_{tr} = -\frac{1}{2}f''(r), \quad R^{t\theta}{}_{t\theta} = R^{t\phi}{}_{t\phi} = R^{r\theta}{}_{r\theta} = R^{r\phi}{}_{r\phi} = -\tfrac{f'(r)}{2r}, \quad R^{\theta\phi}{}_{\theta\phi} = \tfrac{1-f(r)}{r^2} \tag{5}$$

Problemas:

1. Sea $A_\mu(x)$ las componentes del 4-vector potencial electromagnético y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Las ecuaciones de Maxwell sobre un espacio curvo descrito por una métrica $g_{\mu\nu}$ son

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi J^\mu \tag{6}$$

donde el símbolo ; representa derivada covariante en la métrica $g_{\mu\nu}$, y $F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}$. (Note que no es necesario usar derivadas covariantes en la definición de $F_{\mu\nu}$.)

(i) Considere una carga puntual situada en el origen. Suponga el siguiente ansatz para el 4-vector A_μ

$$A_\mu = \{\varphi(r), 0, 0, 0\}$$

donde $\varphi(r)$ solo depende de r. Resuelva las ecuaciones (6) para $r \neq 0$ ($J = 0$) usando como métrica el elemento de línea (1), y encuentre $\varphi(r)$.

(ii) El tensor de energía momentum asociado al campo electromagnético es:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F_\mu{}^\rho F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\, F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right) \tag{7}$$

Demuestre que T_{00} evaluado en la solución encontrada en el problema anterior toma el valor $T_{00} = f(r)q^2/(8\pi\, r^4)$ donde q es una constante de integración que se identifica con la carga eléctrica situada en el origen.

2. Considere ahora las ecuaciones de Einstein con una fuente electromagnética,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\, T_{\mu\nu},$$

donde $T_{\mu\nu}$ fue dado en el problema anterior.

(i) Resuelva estas ecuaciones y encuentre la función $f(r)$ que aparece en (1). Ayuda: Puesto que hay solo una incógnita, basta con considerar la ecuación $G_{00} = 8\pi\, T_{00}$ donde el valor de T_{00} fue calculado en el problema anterior. Escriba explícitamente esta ecuación diferencial para $f(r)$ y demuestre que su solución es

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2},$$

donde m es una constante de integración. ¿Que representa m?

(ii) ¿Representa esta solución un agujero negro? Si su respuesta es si, encuentre la posición del horizonte de eventos en términos de m y q.

3. Considere el modelo cosmológico visto en clase

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) h_{ij}(x^j) dx^i dx^j$$

donde $R(t)$ solo depende de t, y $h_{ij}(x^i)$ solo depende de las coordenadas espaciales. El contenido de materia es un fluído ideal con presión y densidad que solo dependen del tiempo

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho) u^\mu u^\nu + p\, g^{\mu\nu}.$$

En el sistema comóvil del fluído, encuentre la relación entre $p(t), \rho(t)$ y $R(t)$ que sigue de la ecuación de conservación $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, y explique su significado. No haga ninguna suposición sobre h_{ij}. Ayuda: considere solo $T^{0\nu}{}_{;\nu} = 0$, pero sea cuidadoso en expandir primero la derivada covariante y luego tomar $\mu = 0$. Recuerde que $g_{\mu\nu} u^\mu\, u^\nu = -1$.