Relatividad y Gravitación, 2007
Prof. Máximo Bañados

Interrogación # 3

TIEMPO: 2 horas

1. Demuestre que una carga eléctrica q que vive en un espacio con métrica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{1}$$

genera un campo eléctrico $\vec{E} = \frac{q}{r^2}\hat{r}$, es decir, igual al caso plano.

Ayudas y recordatorios:

(a) Resuelva la ecuación de Maxwell (en el vacío) en este background,

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \tag{2}$$

considerando un potencial con simetría esférica (problema de Coulomb),

$$A_\mu = (\phi(r), 0, 0, 0). \tag{3}$$

(b) Recuerde que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

(c) Observe que no son necesarios todos las componentes de la conexión. Para resolver este problema basta conocer la identidad $\Gamma^\mu{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\lambda\sqrt{g}$. (Recuerde que $A^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = 0$ is A es antisimétrico y S es simétrico.)

(d) Si obtiene una ecuación diferencial que no sabe resolver intente la solución usual de Coulomb (en espacio plano)

$$\phi(r) = \frac{q}{r} + \phi_0 \tag{4}$$

y determine $\vec{E}$.

2. Considere la métrica plana en dos dimensiones,

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2. \tag{5}$$

Introduzca las coordenadas hiperbólicas r, λ

$$t = r\sinh(\lambda), \qquad x = r\cosh(\lambda). \tag{6}$$

(a) Determine la métrica en las coordenadas r, λ.

(b) Sabiendo que los símbolos de Cristoffel son cero en las coordenadas t, x, determine los valores de $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ en las coordenadas r, λ mediante el cambio de coordenadas.

3. Los símbolos de Cristoffel para la métrica de una esfera [$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$] son:

$$\Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \tag{7}$$

Escriba la ecuación de transporte paralelo para un vector $V^\mu(x)$. Considere un vector que apunta horizontalmente en el polo norte (con $V^\theta = 1, V^\phi = 0$), y es trasladado por un meridiano hasta el polo sur. Encuentre las componentes del vector trasladado.