Relatividad y Gravitación, 2004
Prof. Máximo Bañados

Interrogación # 2

TIEMPO: 2 horas

1. Considere la siguiente métrica

$$ds^2 = -\left(1 + 2U(r)\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + 2U(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)$$

donde $U(r)$ es una función arbitraria de r, que interpretamos como el potencial por unidad de masa $U = V/m$. Demuestre que extremar la acción

$$I = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

en el límite de bajas velocidades, $dx^i/dt \ll 1$ y $U \ll 1$ es equivalente a extremar la acción de una partícula de masa m en un potencial $V(r)$

$$\delta \int dt \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - V(r) \right) = 0$$

donde $\vec{x} = \{x, y, z\}$ son las coordenadas cartesianas en la región en que $U \ll 1$. [Ayuda: Escriba la métrica en coordenadas cartesianas usando los límites adecuados.]

2. (a) Demuestre eu bajo una transformación de coordenadas infinitisimal ($\xi \ll 1$),

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

la componentes de la métrica transforman según

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \left(\xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + \xi^\rho{}_\mu g_{\rho\nu} + \xi^\rho{}_\nu g_{\mu\rho} \right)$$

(Note que el lado izquierdo está evaluado en x.)

   (b) Dada la métrica $g_{\mu\nu}$, demuestre que si existe un vector ξ que satisface (vector de Killing)

$$\xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + \xi^\rho{}_{,\mu} g_{\rho\nu} + \xi^\rho{}_{,\nu} g_{\mu\rho} = 0$$

entonces

$$q = g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \xi^\nu$$

es conservado sobre las geodésicas. (Ayuda: calcule $\dot{q}$ y demuestre que es cero si x^μ satisface la ecuación de la geodésica.

3. Considere la métrica

$$ds^2 = dr^2 - r^2 dt^2$$

y haga el cambio de coordenadas $r = e^\rho$. Escriba la métrica en las nuevas coordenadas $\{\rho, t\}$. Determine los vectores base $\vec{e}_\rho, \vec{e}_t$ y calcule los símbolos de Christoffel asociados derivando estos vectores.