Relatividad y Gravitación, 2006
Prof. Máximo Bañados, Ayudante: Tomás Andrade

Interrogación # 1

TIEMPO: 2 horas

1. La operación $\tilde{a}(\vec{v}) = a_i v^i$ puede ser generalizada para tensores de otros grados. Por ejemplo, sea $t = \vec{v} \otimes \tilde{a}$. Este objeto actúa naturalmente sobre vectores, $t\vec{u} \equiv \tilde{a}(\vec{u})\ \vec{v} \in V$, donde el resultado es un vector.

   En general, sea A un tensor $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ y B un tensor $\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} A &= A^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q}\ \vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \vec{e}_{i_p} \otimes \tilde{w}^{j_1} \otimes \cdots \tilde{w}^{j_q} \\ B &= B^{i_1 \dots i_q}{}_{j_1 \dots j_r}\ \vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \vec{e}_{i_q} \otimes \tilde{w}^{j_1} \otimes \cdots \tilde{w}^{j_r} \end{aligned} \tag{1}$$

   Definimos operación $A(B)$, donde los q vectores $\tilde{w}$ en A actúan sobre los q vectores $\vec{e}$ de B.

   (a) Determine las componentes del tensor resultante

   (b) Para el caso $p = q = 1$, considere el tensor

$$P = \vec{e}_i \otimes \tilde{w}^i - \vec{v} \otimes \tilde{v}, \qquad \text{con} \qquad \tilde{v}(\vec{v}) = 1, \tag{2}$$

   donde $\vec{v}$ es un vector arbitrario, solo restrigido a tener norma 1.
   Calcule

   i. $P^2 = P(P)$

   ii. $P(\vec{v})$

2. Sea

$$\Lambda(v_1) = \gamma(v_1) \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ -v_1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda(v_2) = \gamma(v_2) \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ -v_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   dos transformaciones de Lorentz con velocidades v_1 y v_2. Calcule $\Lambda(v_1)\Lambda(v_2)$ e interprete su resultado.

3. El momentum de un fotón es un vector. Si el fotón se desplaza en el eje x y tiene frecuencia w, con respecto a un observador O, este vector tiene la forma

$$\vec{p} = p^\mu \vec{e}_\mu, \qquad p^\mu = \hbar w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

   (a) Determine el módulo de este vector.

   (b) Determine la frecuencia w' medida por otro observador que se mueve con velocidad relativa v, con respecto a O. Inteprete su resultado.