Relatividad y Gravitación, 2004
Prof. Máximo Bañados

Interrogación # 1

TIEMPO: 2 horas

1. En un espacio vectorial de dos dimensiones M_2 (y su dual M_2^*) definimos un tensor $T \in \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ cuyas componentes en una cierta base $\vec{e}_\mu$ son

$$T(\tilde{w}^\mu, \vec{e}_\nu) = T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando este tensor podemos asociar a toda 1-forma $\tilde{\alpha}$ una nueva 1-forma $\tilde{\beta}$ mediante la regla

$$\tilde{\beta} = T(\tilde{\alpha}, \quad)$$

   (a) Si las componentes de $\tilde{\alpha}$ (en la base anterior) son $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, determine las componentes de $\tilde{\beta}$.

   (b) Demuestre que si $\tilde{\alpha}$ es talque $\tilde{\beta} = \lambda\tilde{\alpha}$, entonces necesariamente se tiene que $\lambda = \pm 1$.

2. Una partícula se mueve en un sistema S de acuerdo a (g es constante)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{gt}{\sqrt{1 + g^2t^2}}$$

   (a) Encuentre las componentes de la velocidad universal $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ para esta partícula. Verifique que $u^\mu u_\mu = -1$. ¿Es para algún valor de t la velocidad de la partícula mayor que la velocidad de la luz?

   (b) Encuentre las funciones $\{x(\tau), y(\tau)\}$, donde τ es el tiempo propio. Recuerde: $\int dx/\sqrt{1 + x^2} = \text{arcsinh}(x)$.

3. Una fuente de fotones se encuentra en reposo en un sistema S y emite fotones homogeneamente en todas las direcciones del plano $\{x, y\}$. Considere ahora un observador S' que ve la fuente moverse con velocidad $-v$ a lo largo del eje x.

   (a) S' observa un fotón emitido en un ángulo α' con respecto a su eje x'. Si la frecuencia en S es w, determine la frecuencia w' medida por S' (como función de v y α'). Verifique que en los casos límite $\alpha' = 0$ y $\alpha' = \pi$ se reobtienen las fórmulas usuales de effecto Doppler.

   (b) Demuestre que el ángulo α observado por S está relacionado con α', observado por S', de acuerdo a

$$\cos(\alpha') = \frac{\cos(\alpha) - v}{1 - v\cos(\alpha)}$$

Ayuda: Demuestre que, en S, $k^\mu = w\{1, \cos(\alpha), \sin(\alpha)\}$ y escriba una expresión análoga para las componentes del mismo vector en S'.