Relatividad y Gravitación, 2002/2
Prof. Máximo Bañados

Interrogación # 1

TIEMPO: 2 horas

1. Un protón de masa M que se desplaza a lo largo del eje $\hat{x}$ con velocidad v (en el sistema laboratorio) incide sobre otro protón en reposo. Como resultado de la colisión se produce un mesón de masa m, además de los dos protones. Determine la velocidad mínima v para que esta reacción pueda ocurrir. Ayudas: (a) Si el protón tiene justo la energía necesaria para crear el mesón, las tres partículas resultantes se encontrarán en reposo en el sistema centro de masas; (b) Puesto que solo se requiere un número, v, considere la conservación de $P^\mu P_\mu$ (P^μ representa aquí el momentum total de todas las partículas) y recuerde que esta cantidad es invariante de Lorentz.

2. (i) Sea P in proyector que actúa sobre vectores en la forma $V_\perp^\mu = (\delta^\mu_\nu + U^\mu U_\nu)V^\nu$, donde U es unitario tipo tiempo, $U \cdot U = -1$. Demuestre que P satisface $V_\perp^\mu U_\mu = 0$ y $V_{\perp\perp} = V_\perp$.

   (ii) Sea T un tensor (2 2) con componentes $T^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$, $\vec{U}$ un vector de components U^μ, y $\tilde{U}$ su 1-forma dual correspondiente. Calcule,

   - $\phi_1 := T(\tilde{U}, \tilde{w}^\alpha, \vec{e}_\alpha, \vec{U})$
   - $\phi_2 := T(\tilde{w}^\alpha, \tilde{w}^\beta, \vec{e}_\beta, \vec{e}_\alpha)$
   - Suponiendo que $T^{10}{}_{01} = a$, $U^1 = b$, y todas las otras componentes son cero, determine los valores explícitos de ϕ_1 y ϕ_2.

3. Sea G el conjunto de todas las matrices $\Lambda_\mu{}^\nu$ que satisfacen la relación:

$$\Lambda_\mu{}^\rho \, g_{\rho\sigma} \, \Lambda_\nu{}^\sigma = g_{\mu\nu},$$

   donde $g_{\alpha\beta}$ son las componentes de un tensor invertible y simétrico. (i) Demuestre que G tiene una estructura de grupo, es decir, (i) posee identidad; (ii) toda matriz $\Lambda_\mu{}^\nu \in G$ posee inversa; (iii) $\Lambda_1 \in G$ y $\Lambda_2 \in G$ entonces $\Lambda_1\Lambda_2 \in G$; (iv) es asociativo.