Tarea N^{o}1
Mecánica Estadística Fiz 0411

Plazo de entrega: Miercoles 9 de Abril 2008

Problema 1

Una modificación al modelo de gas ideal es el llamado gas de *Van der Waals*, descrito por la ecuación:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \tag{1}$$

donde R es la constante de los gases, $v \equiv V/N$ con N el número de moles de partículas del sistema, y a con b son constantes empíricas características de cada gas.

- Investigue en la literatura y explique por qué este modelo representa una mejora al gas ideal, y en particular, indique qué significan las constantes a y b.
- Encuentre la forma mas simple para la ecuación de estado termal, consistente con la ecuación de estado dada (es decir, encuentre $1/T = f(u, v)$). Con este propósito, note que:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} \tag{2}$$

  donde $s \equiv S/N$ y $u \equiv U/N$. Usando esto, encuentre una condición para $1/T$. Compare con el modelo de gas ideal y obtenga la relación pedida.
- Encuentre, usando los puntos anteriores, la entropía para este modelo.

Problema 2

Considere una banda elástica compuesta por N moleculas de cierto polímero, colocadas en un arreglo lineal. Las variables macroscópicas a considerar son el largo L, la tensión τ, la temperatura T y la energía U. El largo juega un papel análogo al volumen, y la tensión análogo a la presión negativa ($\tau \sim -p$). Considere que el largo puede variar entre $L_0 = Nl_o$, que es el largo natural de la cadena sin estirar, y $L_1 = Nl_1$ que es el límite de linearidad del elástico (aquí l_0 y l_1 son los largos de cada molécula en los límtes descritos).
Por observaciones experimentales sabemos que la energía es practicamente independientes del largo, y que la tensión para un largo fijo, aumenta con la temperatura. Ambas observaciones las podemos resumir en:

$$U = cL_0T \tag{3}$$

$$\tau = bT\frac{L - L_0}{L_1 - L_0} \tag{4}$$

donde c y b son constantes, y $L_0 < L < L_1$.

- Muestre que ambas ecuaciones cumplen la condición de consistencia:

$$\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{-\tau}{T}\right) \tag{5}$$

- Encuentre la entropía para este sistema.
- Calcule el cambio fracional en $(L - L_0)$ al variar la temperatura en ΔT a tensión constante. Exprese el resultado en función del largo y de la temperatura.
- Si una banda elástica se estira una cantidad dL, a temperatura constante, calcule la transferencia de calor dQ a esta. Calcule también el trabajo efectuado. ¿Cómo se relacionan estas dos cantidades y por qué?

Problema 3

Considere el sistema descrito por:

$$S = \frac{4}{3}\sigma^{1/4}U^{3/4}V^{1/4} \tag{6}$$

donde σ es una constante. Note que no depende del número de partículas N.

- Encuentre las ecuaciones de estado $\frac{1}{T} = \frac{1}{T}(U, V)$ y $\frac{p}{T} = \frac{p}{T}(U, V)$. ¿A qué sistema corresponde este modelo? ¿Qué constante es σ?
- Los cosmólogos consideran el universo como una cavidad electromagnética expandiéndose la cual contiene radiación que actualmente se encuentra a 2,7[K] (Esta es la llamada temperatura del fondo cósmico de micro ondas, CMB por su sigla en inglés). ¿Cuanto será la temperatura de la radiación cuando el volumen del universo sea el doble del actual? Asuma que la expansión es isotrópica.
- ¿Cuanto vale la presión de radiación del CMB actualmente en el universo?

Problema 4

Considere dos osciladores cuánticos unidimensionales de igual frecuencia ω_0. La energía total de este sistema está dada por $U = U_1 + U_2 = \hbar\omega_0(n_1 + n_2)$, donde n_1 y n_2 son los números cuánticos de cada oscilador. Encuentre el numero de estados para U fijo, $\Omega(U)$. Con este resultado, encuentre la entropía S y determine la ecuación de estado $T = T(U)$.