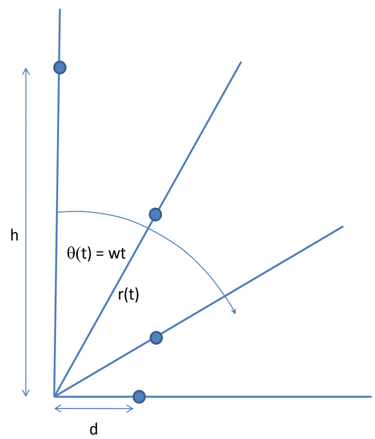
Mecánica Clásica II
Prof. Máximo Bañados

Interrogación # 1

TIEMPO: 2 horas

1. Una barra rígida rota con velocidad angular constante w desde una posición vertical hasta quedar horizontal (ver figura). Una partícula de masa m se desliza sin roce sobre la barra y cae por efecto



de la gravitación.

   (a) Usando como coordenada la distancia $r(t)$ entre el eje de giro y la posición de la masa en cada instante, escriba el Lagrangiano $L(r, \dot{r}, t)$ para este problema. Ayuda: note que la posición de la masa en cada instante en coordenadas cartesianas es $\{x = r\sin(wt), y = r\cos(wt)\}$.

   (b) Escriba las ecuaciones de Euler Lagrange y muestre que la solución tiene la forma

$$r(t) = Ae^{wt} + Be^{-wt} + C\cos(wt) \tag{1}$$

   Es C arbitrario?

   (c) Ajuste A, B de modo que, en $t = 0$ (barra vertical), la partícula esté a una altura $r = h$ y con velocidad $\dot{r} = 0$.

   (d) Determine la posición d, sobre el eje x, cuando la barra ha llegado a su posición horizontal. Es d siempre positivo?

2. En este problema Ud. derivará la relación $b(\theta)$ entre el parámetro de impacto y el ángulo de scattering de una manera geométrica. Considere la órbita

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{A}(1 + \epsilon\cos(\phi + \phi_0)), \qquad \left(\frac{1}{A} = \frac{k}{ml^2}\right). \tag{2}$$

donde $A > 0$. Asumiremos una órbita hiperbólica con $\epsilon > 1$.

   (a) Demuestre que escogiendo $\cos(\phi_0) = 1/\epsilon$ la órbita en coordenadas cartesianas $\{x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi\}$ se lee,

$$A = \sqrt{x^2 + y^2} + x - y\tan(\phi_0) \tag{3}$$

(b)
- Muestre que cuando $x \to -\infty$ la coordenada y permanece finita: $y \to y_0$. Determine y_0.
- Muestre que cuando $x \to +\infty$ la coordenada y se comporta como $y \to \alpha\, x$ donde

$$\alpha = -\frac{2\tan\phi_0}{1-\tan^2\phi_0} \tag{4}$$

(Asuma $\tan^2\phi_0 > 1$.) Relacione α con el ángulo de scattering.
- Haga un dibujo de la órbita indentificando el parámetro de impacto b, y el ángulo de scattering θ.

(c) Encuentre la relación entre α y ϕ_0 y determine la relación $b(\theta)$.
Ayuda: $\tan(2\chi) = 2\tan\chi/(1-\tan^2\chi)$

3. Una partícula de masa m orbita un agujero negro de masa M. Este problema está descrito (aproximadamente) por las dos ecuaciones

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) \tag{5}$$
$$\ell = r^2\dot{\theta} \tag{6}$$

donde el potencial está dado por

$$V(r) = -\frac{mMG}{r} - \frac{mMG\ell^2}{r^3}. \tag{7}$$

(a) Escriba el potencial efectivo y determine el radio de las órbitas circulares estables.

(b) Determine el período de rotación para las órbitas circulares estables.