Tarea Octubre 2005. Electrodinámica II

1. Las tranformaciones de Lorentz infinitisimales son $\delta x^\mu = \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu$, donde $\epsilon^{\mu\nu}$ es antisimétrico.

   (a) Encuentre la transformación correspondiente sobre el campo A_μ utilizando $A_\mu(x)dx^\mu = A'_\mu(x')dx'^\mu$. Agregue una transformación de gauge de modo que δA_μ sea invariante.

   (b) Determine las corrientes de Noether asociadas a esta simetría. Demuestre que ellas se pueden escribir en forma muy simple en términos del tensor de energía-momentum $T^{\mu\nu}$.

   (c) Compruebe explícitamente que estas corrientes son conservadas.

2. Considere las ecuaciones de Maxwell en presencia de una corriente externa J^μ_{ext} (conservada). El Lagrangiano correspondiente (escríbalo!) es invariante bajo las transformaciones de gauge

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon(x) \tag{1}$$

   donde $\epsilon(x)$ es una función arbitraria de x.

   (a) Calcule la corriente de Noether J^μ asociada a esta simetría.

   (b) Demuestre que la carga de Noether encerrada en un volúmen V puede expresarse como una integral de flujo sobre el borde de V

$$Q = \int_V d^3x\ J^0 = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{f} \tag{2}$$

   Determine el vector $\vec{f}$. Recuerde el teorema de Stokes: si V es el volúmen encerrado por una superficie S, entonces $\int_V dV\, \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{f}$ donde $d\vec{S}$ es el elemento de superficie.

   (c) Demuestre que si sobre la superficie S la función ϵ es igual a 1 [$\epsilon(\vec{x}) = 1,\ \forall\ \vec{x} \in S$] entonces la carga de Noether Q es exactamente igual a la carga eléctrica total encerrada en el volúmen V.

3. Resuelva el problema 12.19 del Jackson (tercera edición).

4. Resuelva el problema 14.4 del Jackson (tercera edición).