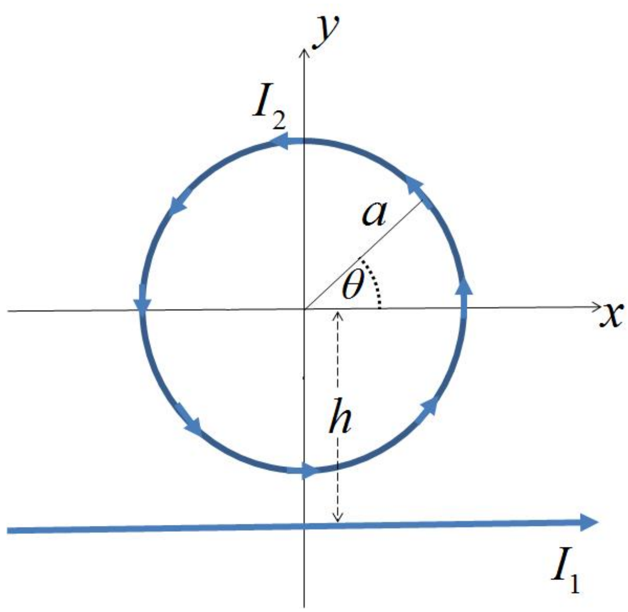
## Problema 1

Considere un alambre infinito por el cual circula una corriente $I_1$ y una espira circular de radio $a$, coplanar con el alambre y tal que el centro de la espira esta a una distancia $h$ del alambre. Suponga que la espira circular conduce una corriente $I_2$.




**a)** Usando la ley de Ampere para circuitos, determine la expresión vectorial del campo magnético $\vec{B}_1$ debido a la corriente $I_1$ que circula por el alambre infinito. ¿Cómo es la expresión de $\vec{B}_1$ en la región coplanar ($z = 0$) donde se encuentra la espira?

*solución:* Ley de Ampere:

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = \mu_0 I_1 \quad \text{con} \quad \vec{B}_1 = B_1 \hat{\phi} \quad \text{y} \quad d\vec{l}_1 = R d\phi \hat{\phi}$$

donde $\phi$ es el ángulo que describe una trayectoria circular alrededor del alambre infinito y $R$ es la distacia radial entre el punto de observación y el alambre. Entonces

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \hat{\phi}$$

Para la región coplanar ($z = 0$) donde se encuentra la espira, campo magnético toma la forma

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \hat{z} \quad \text{(vector saliendo del plano de la figura).}$$ 2Pts

**b)** Escriba la formula general de la fuerza que actúa sobre la espira debido al campo externo $\vec{B}_1$.

$$\vec{F}_{1\to 2} = \oint I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1.$$ 0.5Pts

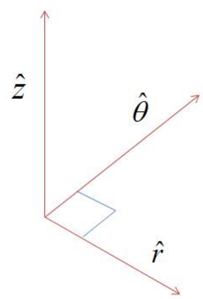
**c)** Usando la expresión de la pregunta **a)** halle la expresión de la fuerza que actúa sobre la espira donde circula la corriente $I_2$. Ayuda: Para facilitar los cálculos exprese todos los vectores en términos de los vectores unitarios cartesianos $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$.

$$\vec{F}_{1\to2} = \oint I_2 d\vec{l}_2 \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}\hat{z} \quad \text{con} \quad d\vec{l}_2 = a d\theta \hat{\theta}$$

por tanto

$$\vec{F}_{1\to2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \oint d\theta \hat{\theta} \times \frac{\hat{z}}{R}$$

donde




$$\hat{\theta} \times \hat{z} = \hat{r}$$

Nótese que $\hat{r}$ es el vector radial unitario con origen en el centro de la espira.

La expresión de la fuerza toma la forma

1Pt

0.5Pts

$$\vec{F}_{1\to2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \oint \frac{d\theta}{R}\hat{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{h + a\sin(\theta)}(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y})$$

donde $R = h + a\sin(\theta)$ es la distancia vertical entre cada punto de la espira circular y el alambre infinito. Finalmente se obtiene

0 0.5Pts

0.5Pts

$$\vec{F}_{1\to2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left( \cancel{\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta) d\theta}{(h/a) + \sin(\theta)}\hat{x}} + \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta) d\theta}{(h/a) + \sin(\theta)}\hat{y} \right) = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{(h/a)}{\sqrt{(h/a)^2 - 1}}\right)\hat{y}$$

**d)** Determine el valor del torque $\vec{\tau}$ que actúa sobre la espira debido al campo magnético $\vec{B}_1$.

$$d\vec{\tau} = \vec{R}' \times d\vec{F}_{1\to2} = \eta R \hat{y} \times d\vec{F}_{1\to2}$$

donde $\eta > 0$ y $|\vec{R}'| = \eta R$ representa la distancia entre cualquier eje paralelo al alambre infinito y la espira. Entonces

$$d\vec{\tau} = \vec{R}' \times d\vec{F}_{1\to2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\eta R \hat{y} \times \frac{d\theta}{R}\hat{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\eta d\theta \hat{y} \times (\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}).$$

Finalmente

1Pt

$$\vec{\tau} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\eta \oint d\theta \cos(\theta)(-\hat{z}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\eta \int_0^{2\pi} d\theta \cos(\theta)(-\hat{z}) = 0.$$