Examen
FIS 1533 1'2013

Apellido, Nombre: ____________________

Número en la lista:

Advertencia: La sanción por copiar es un 1,1 final en el ramo + informe a Secretaría General.

TIEMPO: 2 horas

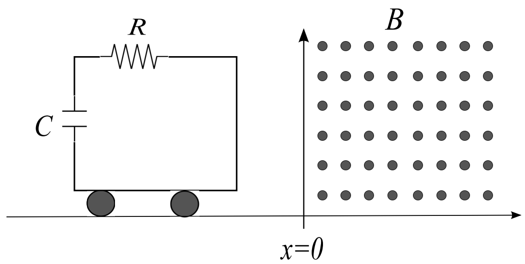
No puede usar apuntes ni calculadora ni tener celulares sobre la mesa. No usar lápiz a mina. Las respuestas a las alternativas debe marcarlas en la misma pregunta.

Problema	**Nota**
P1	
P2	
P3	

1. El circuito de la figura, de alto a y largo L se encuentra sobre ruedas y se desplaza con velocidad $v_0\hat{x}$. El condensador está descargado de modo que no circula corriente en el circuito. Llega hasta un región en que existe un campo magnético uniforme ($x = 0$ un la figura). Despreciando la autoinducción del circuito calcule,

   a) la velocidad del carrito y la carga en el condensador como función del tiempo

   b) la energía total disipada en la resistencia mientras el carro entra al campo (no debe preocuparse de que ocurre una vez que entra entero al campo).



Solución:

Elijamos el eje y vertical de modo que el campo es $\vec{B} = B_0\hat{z}$. Al entrar el carro a la región en que hay campo cambia su flujo y se genera una corriente inducida en el sentido de la flecha. Efectivamente si el elemento de área $d\vec{S} = dxdy\hat{z}$ el flujo que atraviesa el circuito cuando este ha entrado una distancia x es

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bax$$

y la fem inducida es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav.$$

Que resulte negativa significa que circula a favor de los punteros del reloj (puesto que elegimos el vector superficie en la dirección z). Las ecuaciones que describen este problema son entonces la ecuación para la corriente en el circuito

$$Bav = RI + \frac{Q}{C} \tag{1}$$

en que Q es la carga acumulándose en la parte inferior del condensador. La segunda ecuación es la relación entre la carga del condensador y la corriente, que en este caso es

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{2}$$

y por último la fuerza magnética sobre el circuito

$$m\frac{dv}{dt}\hat{x} = \int Id\vec{\ell} \times \vec{B} = -IaB\hat{x}. \tag{3}$$

Al calcular la expresión anterior las fuerzas sobre los segmentos horizontales del circuito se anulan, solamente contribuye el segmento vertical que ya entró al campo. Por último, para resolver las ecuaciones (1) (2) y (3) hay que dar las condiciones iniciales. Estas son

$$v(t=0) = v_0, \qquad Q(t=0) = 0 \tag{4}$$

Obsérvese que la ecuación (1) nos indica que la corriente $I(t=0) = Bav_0/R$ y usando esto en (2) vemos que $dQ/dt(t=0) = I(0) = Bav_0/R$. Para encontrar la ecuación para la la carga del condensador derivamos (1) y reemplazamos (2) y (3) para eliminar I y v. Resulta

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{B^2a^2}{mR}\right)\frac{dQ}{dt} = 0, \text{ sujeto a } Q(0) = 0, \quad \dot{Q}(0) = \frac{Bav_0}{R}. \tag{5}$$

Conviene llamar

$$\alpha \equiv \frac{1}{RC} + \frac{B^2a^2}{mR}.$$

La solución a (5) es

$$\boxed{Q(t) = \frac{Bav_0}{R\alpha}\left(1 - \exp^{-\alpha t}\right)}$$

lo que usamos para integrar (2) para obtener la velocidad (usando que $I = dQ/dt$,

$$m(v - v_0) = -aB(Q(t) - Q(t=0))$$

que es

$$\boxed{v(t) = v_0 - \frac{aB}{m}Q(t),}$$

en que $Q(t)$ es la expresión ya calculada.

b) La energía total disipada en la resistencia es

$$\boxed{W = \int_0^\infty RI^2 dt = \frac{\alpha B^2 v_0^2}{2R}}$$

para lo que hemos usado

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{Bav_0}{R}\exp^{-\alpha t}.$$

Lo siguiente no se pide en la prueba, pero podemos observar el balance de energía: multipliquemos por I e integremos en el tiempo la ecuación (1) del circuito . Resulta

$$\int_0^\infty RI^2 dt = \int_0^\infty vaBI - \int_0^\infty \frac{Q}{C} I dt$$

Usando (2) y (3) podemos reescribir esto como

$$\int_0^\infty RI^2 dt = -\int_0^\infty mv\frac{dv}{dt} - \int_0^\infty \frac{Q}{C} dQ$$

que se integra directamente y es

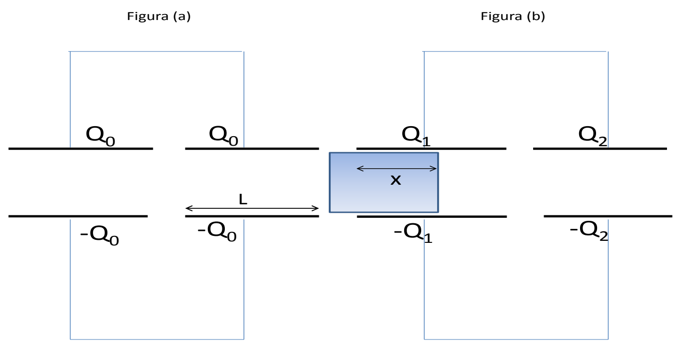
$$\int_0^\infty RI^2 dt = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2(\infty) + \frac{1}{2}\frac{Q^2(0)}{C} - \frac{1}{2}\frac{Q^2(\infty)}{C}. \tag{6}$$

Usando los valores ya conocidos para $v(t)$ y $Q(t)$ sabemos $Q(\infty) = Bav_0/(R\alpha)$, $v(\infty) = v_0 - v_0 a^2 B^2/(mR\alpha)$ se puede verificar que se recupera el resultado ya calculado.

Notamos que la fórmula anterior se puede escribir como

Energía cinética inicial = potencia disipada + energía cinética final + energía almacenada en el condensador.

2. Considere dos condensadores planos iguales, distancia entre placas d, ancho a y largo L (el largo L se muestra en la figura). Inicialmente ambos condensadores tienen carga Q_0 y están conectados en paralelo (figura (a)).



(a) ¿Cual es el valor de la energía total almacenada en este sistema? (Figura (a))

Se introduce ahora un dieléctrico de permitividad ϵ una distancia x en uno de ellos (figura (b)).

(b) Determine la capacidad equivalente del condensador con el dieléctrico.

(c) Determine las cargas Q_1 y Q_2 acumuladas en las placas de cada condensador.

(d) Suponga finalmente que el dieléctrico esta hecho de teflón, con una permitividad (aproximada!) $\epsilon = 2\epsilon_0$. Suponga además que $x = \frac{L}{2}$. Evalúe para esta situación la energía almacenada en el sistema completo. ¿Es esta energía mayor o menor que la energía inicial? ¿En base a la energía obtenida, que puede decir sobre la fuerza realizada para introducir el dieléctrico?

Solución:

(a) La energía almacenada en un condensador de capacidad C con carga Q es $\frac{1}{2}Q^2/C$. La energía total almacenada en este sistema inicialmente entonces es

$$U_0 = 2 \times \frac{Q_0^2}{2C_0} = \frac{Q_0^2}{C_0}, \qquad C_0 = \frac{\epsilon_0 a\, L}{d} \tag{1}$$

(C_0 es la capacidad inicial de cada uno.)

(b) Cuando el dieléctrico ha ingresado una distancia x este condensador es equivalente a dos condensadores en paralelo (al mismo potencial) de capacidades $\frac{\epsilon\, a\, x}{d}$ y $\frac{\epsilon_0\, a\,(L-x)}{d}$. La capacidad equivalente la llamaremos C_1 y tiene el valor,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{a}{d}(x\epsilon + (L-x)\epsilon_0) \\ &= C_0\left(1 + \frac{x}{L}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1\right)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

(c) La carga total disponible es $2Q_0$, entonces

$$Q_1 + Q_2 = 2Q_0. \tag{3}$$

Por otro lado, el potencial es el mismo,

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_0} \tag{4}$$

Estas dos ecuaciones permiten encontrar Q_1, Q_2

$$Q_1 = \frac{2C_1Q_0}{C_1 + C_0}, \qquad Q_2 = \frac{2C_0Q_0}{C_1 + C_0} \tag{5}$$

(d) La energía total es (considerando un condensador de capacida equivalente C_1 con carga Q_1 y otro de capacidad C_0 con carga Q_2)

$$U = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_0} \tag{6}$$

De las fórmula anteriores encontramos los valores de Q_1, Q_2, C_1 cuando $\epsilon = 2\epsilon_0$ y $x = \frac{L}{2}$:

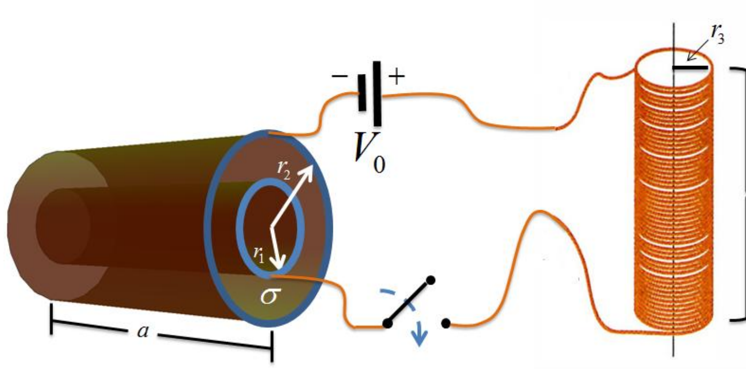
$$Q_1 = \frac{6}{5}Q_0, \quad Q_2 = \frac{4}{5}Q_0, \quad C_1 = \frac{3}{2}C_0 \tag{7}$$

La energía total es,

$$U = \frac{4}{5}\frac{Q_0^2}{C_0} = \frac{4}{5}U_0 \tag{8}$$

Entonces, la energía final en menor a la inicial. Por lo tanto el dieléctrico fue empujado hacia adentro.

3. El circuito de la figura consiste de una fuente de voltaje constante (V_0) conectada en serie con un solenoide de inductancia L y dos coaxiales concéntricos conductores de radios r_1 y r_2 y longitud a.



El espacio entre los dos coaxiales está lleno con un material de conductividad[1] σ. El circuito cuenta con un interruptor que cerrado permite el paso de la corriente eléctrica I. El solenoide es de longitud b y sección transversal circular, de radio r_3. Considere que el solenoide tiene N espiras y su longitud b es mucho mayor que su radio r_3. Por tanto, el campo magnético dentro del solenoide se puede considerar uniforme y por fuera de valor cero.

a) Determine la resistencia total R que hay entre los dos coaxiales conductores. La ley de Ohm para las diferentes regiones es:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma E \hat{r}, \tag{9}$$

y la corriente eléctrica I esta definida por la expresión

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = JA = J 2\pi r a. \tag{10}$$

En la Ec. (10) $\vec{A} = A\hat{r}$, donde A es la sección transversal para un valor dado de r.

De las Ecs. (9) y (10) obtenemos

$$E = \frac{I}{2\pi a \sigma r}. \tag{11}$$

La diferencia de potencial entre los coaxiales interior y exterior es:

$$V = -\int_{r_2}^{r_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{I}{2\pi a \sigma} \log(r_2/r_1), \tag{12}$$

por consiguiente,

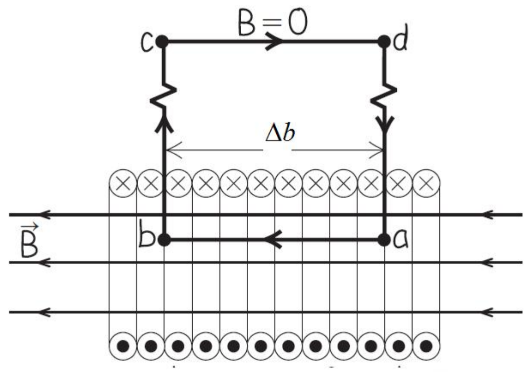
$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi a \sigma} \log(r_2/r_1). \tag{13}$$

b) Determine la inductancia L del solenoide en términos de sus dimensiones geométricas.

[1]por un error de tipeo, en el enunciado original decía resistividad. Ambas opciones serán consideradas correctas.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i \tag{14}$$

Donde i es la corriente encerrada por la trayectoria cerrada.



La densidad de vueltas se define como $n = N/b$, entonces

$$nI = \frac{N}{b}I = \frac{di}{dx} \rightarrow i = \int_0^{\Delta b} i dx = nI\Delta b. \tag{15}$$

De la figura se observa que solo el camino interior ($a \rightarrow b$) contribuye a la integral (14), por consiguiente

$$B\Delta b = \mu_0 nI\Delta b \rightarrow B = \mu_0 nI \tag{16}$$

Por definición $\Phi_B = BA = LI$

$$L = B\frac{\pi r_3^2}{I} = \mu_0 n\pi r_3^2 = \mu_0 N\frac{\pi r_3^2}{b} \tag{17}$$

c) Si para un tiempo t=0 se cierra el interruptor ¿Cuál es el valor de la corriente inicial $I(0)$ del circuito? ¿Cuál es el valor de la caída de potencial sobre el solenoide?

Para $t = 0$, $I(0) = 0$ y $V_L = V_0$.

d) ¿Cuál será el valor de la corriente I para un tiempo $t = \infty$?

Para $t = \infty$, $I(\infty) = V_0/R$.

e) Plantee la ecuación de Kirchhoff del circuito RL.

$$V_0 = RI + L\frac{dI}{dt} \tag{18}$$

f) Resuelva la ecuación para la corriente eléctrica del circuito.

$$\int_0^I \frac{dI}{\frac{V_0}{R} - I} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt \rightarrow I = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right) \tag{19}$$

g) ¿Cómo es la expresión del voltaje sobre la inductancia?

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = V_0 e^{-Rt/L} \tag{20}$$

h) Dibuje el comportamiento de la corriente I y del voltaje sobre el solenoide en el tiempo.