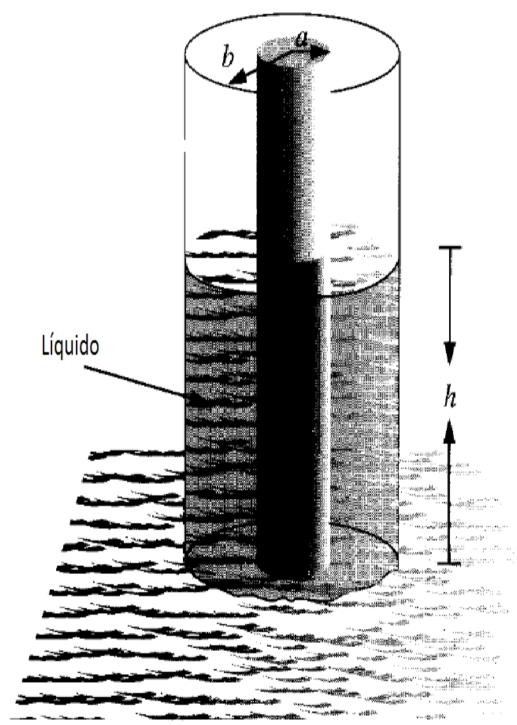
1. Un condensador cilíndrico de radio interior a, radio exterior b y carga constante Q es introducido verticalmente en un líquido dieléctrico (lineal) de permitividad ϵ. El líquido puede subir por el espacio entre los dos cilindros.

   Suponiendo que el líquido dieléctrico ha subido una altura h:

   (a) Determine los campos $\vec{D}$ y $\vec{E}$ en el interior del condensador.

   (b) Determine la capacidad equivalente del condensador en esa situación.

   (c) Si la densidad de masa del líquido es ρ_0, determine la altura h en que se logra el equilibrio entre la fuerza dieléctrica que actúa sobre el líquido, y la gravitación.



Solución:

(a) Sea z una coordenada vertical paralela al cilindro con $z = 0$ coincidiendo con la superficie del líquido. Llamemos I la zona del condensador que está sin dieléctrico ($h < z < L$), y II la zona con dieléctrico ($0 < z < h$).

Comencemos determinando las densidades de carga que hay en el cilindro interior. Estas densidades determinan el campo eléctrico en el interior del condensador.

Primero notemos que las placas son metálicas y por lo tanto equipotenciales. Esto significa que el campo eléctrico en I debe ser igual al campo en II. De lo contrario I y II no estarían al mismo potencial. Sea σ_I y σ_{II} las densidades de carga (libre) en el cilindro interior. El campo eléctrico en cada una de las zonas es radial y con magnitud

$$E_I = \frac{\sigma_I a}{\epsilon_0 r}, \qquad E_{II} = \frac{\sigma_{II} a}{\epsilon r}, \tag{1}$$

(El campo E_I se calcula usando la Ley de Gauss en el vacío. El campo E_{II} se calcula usando la Ley de Gauss en dieléctricos y relacionando $D = \epsilon E$.) Para que E_I y E_{II} sean iguales se debe satisfacer,

$$\frac{\sigma_I}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{II}}{\epsilon} \tag{2}$$

Por otro lado, la carga total disponible está fija, entonces,

$$2\pi a(L - h)\sigma_I + 2\pi a h \sigma_{II} = Q = 2\pi a L \sigma_0. \tag{3}$$

Aquí hemos introducido σ_0, la densidad de carga como si Q estuviera distribuida homogéneamente por todo el cilindro. Las ecuaciones (2) y (3) permiten despejar σ_I y σ_{II},

$$\sigma_I = \frac{\sigma_0 \epsilon_0 L}{h(\epsilon - \epsilon_0) + \epsilon_0 L}, \qquad \sigma_{II} = \frac{\sigma_0 \epsilon L}{h(\epsilon - \epsilon_0) + \epsilon_0 L}, \tag{4}$$

Reemplzando estos valores en (1) determinamos los campos eléctricos en ambas zonas (que son iguales). El campo de desplazamiento se obtiene fácilmente para cada zona,

$$D_I = \epsilon_0 E_I = \frac{\sigma_I a}{r}, \qquad D_{II} = \epsilon E_{II} = \frac{\sigma_{II} a}{r}$$

(b) Cuando el líquido ha subido una altura h podemos interpretar está situación como dos condensadores en paralelo cuyas capacidades se suman. Las capacidades solo dependen de la geometría del sistema, y no de las distribuciones de carga. En la zona I la capacidad es conocida

$$C_I = \frac{2\pi(L - h)\epsilon_0}{\ln(b/a)}$$

donde L es la altura total del cilindro (desde la superficie del líquido). Para la zona II la capacidad será

$$C_{II} = \frac{2\pi h \epsilon}{\ln(b/a)}.$$

La capacidad del condensador compuesto (paralelo) entonces es:

$$C(h) = \frac{2\pi}{\ln(b/a)}(\epsilon_0 L + h(\epsilon - \epsilon_0))$$

y dependen explícitamente de la altura h.

(c) La energía almacenada (con carga total Q constante) es:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(h)}$$

donde la capacidad $C(h)$ fue calculada antes. La fuerza dielétrica que actúa sobre el líquido es

$$-\frac{dU}{dh} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(h)^2}\frac{dC(h)}{dh} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(h)^2}\frac{2\pi}{\ln(b/a)}(\epsilon - \epsilon_0)$$

El líquido logra el equilibrio cuando esta fuerza es igual y opuesta a la fuerza gravitacional (aquí M es la masa del líquido que ha subido)

$$Mg = \pi(b^2 - a^2)h\rho g$$

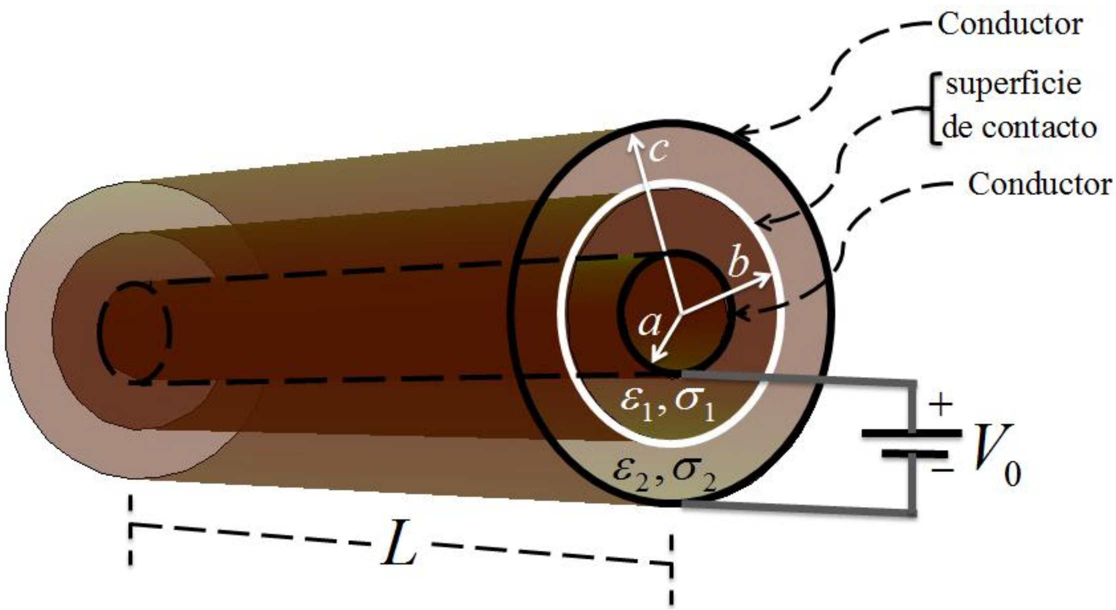
La ecuación que determina el valor h entonces es:

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(h)^2}\frac{2\pi}{\ln(b/a)}(\epsilon - \epsilon_0) = \pi(b^2 - a^2)h\rho g$$

Esta es una ecuación cúbica para h, cuya solución es conocida pero muy extensa para escribir aquí.

2. Considere dos cilindros coaxiales conductores de longitud L mucho mayor que los radios de los cilindros; el interior de radio a y el exterior de radio c (ver figura). En el espacio $a < r < b$ está lleno con un material dieléctrico de permitividad $\epsilon_1 = \epsilon_{r1}\epsilon_0$ y conductividad σ_1. De la misma forma, el espacio $b < r < c$ está lleno con otro material dieléctrico de permitividad $\epsilon_2 = \epsilon_{r2}\epsilon_0$ y conductividad σ_2. Entre ambos cilindros coaxiales se establece una diferencia de potencial V_0. Calcule

    a) la resistencia entre los electrodos.
    b) la densidad de carga eléctrica acumulada en la interface entre los dos materiales dieléctricos (superficie radio b en la figura).
    c) Suponga ahora que las conductividades σ_1 y σ_2 son cero. Determine la capacitancia total del sistema.



Solución parte a)

(Ver una solución alternativa mas abajo.)

Como se observa de la figura, el coaxial interior, de radio a, esta a un mayor a potencial que el coaxial exterior, de radio c. Por consiguiente, los vectores campo eléctrico $\vec{E}$, desplazamiento $\vec{D}$, y densidad de corriente $\vec{J}$ se pueden asumir en el sentido positivo de la coordenada radial r, i.e. $\vec{E}_i = E_i\hat{r}$, $\vec{D}_i = D_i\hat{r}$ y $\vec{J}_i = J_i\hat{r}$, con

$$i = \begin{cases} 1, & a < r < b \\ 2, & b < r < c. \end{cases} \tag{5}$$

La ley de Ohm para las diferentes regiones es:

$$\vec{J}_i = \sigma_i \vec{E}_i, \tag{6}$$

y la corriente eléctrica I esta definida por la expresión

$$I = \int \vec{J}_i \cdot d\vec{A} = J_i A = J_i 2\pi r L. \tag{7}$$

En la Ec. (7) $\vec{A} = A\hat{r}$, donde A es la sección transversal para un valor dado de r.
De las Ecs. (6) y (7) obtenemos

$$E_i = \frac{I}{2\pi r L \sigma_i}. \tag{8}$$

La diferencia de potencial entre los coaxiales interior y exterior es:

$$\begin{aligned} V(a) - V(c) = V_0 &= \int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} &(9)\\ &= \frac{I}{2\pi L}\left(\frac{\log(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\log(c/b)}{\sigma_2}\right), &(10) \end{aligned}$$

por consiguiente,

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{\log(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\log(c/b)}{\sigma_2}\right). \tag{11}$$

Solución altenativa para parte (a). La resistencia para un objeto de largo L, sección A y conductividad σ es $R = \frac{L}{\sigma A}$. Un cilindro de largo L, radio interior r_1 y radio exterior r_2 puede separarse en cáscaras de ancho dr. La resistencia de cada elemento es:

$$dR = \frac{dr}{\sigma \, 2\pi \, r L}$$

y por lo tanto la resistencia total es

$$R = \int_{r=r_1}^{r=r_2} dR = \frac{1}{2\pi\sigma L} \ln(r_2/r_1)$$

donde r_2 y r_1 son los radios exterior e interior, respectivamente.
Apliquemos esta fórmula a ambos objectos de conductividades σ_1 y σ_2. Se obtiene,

$$R_1 = \frac{1}{2\pi\sigma_1 L} \ln(b/a), \qquad R_2 = \frac{1}{2\pi\sigma_2 L} \ln(c/b),$$

la resistencia total entonces es:

$$R = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{\ln(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\ln(c/b)}{\sigma_2}\right)$$

que coincide con el valor calculado por el otro método.

Solución parte b)

Usando la Ley de Gauss para una pequeña caja que encierre la interfase podemos calcular la densidad de carga libre σ_Q, dada por la expresión

$$\begin{aligned} \sigma_Q = D_2 - D1 &= \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 &(12)\\ &= \varepsilon_2 \frac{I}{2\pi b L \sigma_2} - \varepsilon_1 \frac{I}{2\pi b L \sigma_1}. &(13) \end{aligned}$$

De la Ec. (11) observamos que $I = V_0/R$, por tanto

$$\begin{aligned} \sigma_Q &= \varepsilon_2 \frac{V_0}{2R\pi b L \sigma_2} - \varepsilon_1 \frac{V_0}{2R\pi b L \sigma_1} && (14) \\ &= \frac{\varepsilon_2 \frac{V_0}{2\pi b L \sigma_2} - \varepsilon_1 \frac{V_0}{2\pi b L \sigma_1}}{\frac{1}{2\pi L}\left(\frac{\log(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\log(c/b)}{\sigma_2}\right)} && (15) \\ &= \left(\frac{V_0}{b}\right) \frac{\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2}{\log(b/a)\sigma_2 + \log(c/b)\sigma_1} && (16) \end{aligned}$$

Solución parte c)

Se estima el campo eléctrico en la región entre los dos coaxiales usando la ley de Gauss:

$$\oint_{SG} \vec{D} \cdot d\vec{A}_{SG} = Q, \qquad (17)$$

donde Q es la carga en el coaxial interior y A_{SG} es una superficie gaussiana encerrando este coaxial. De la Ec. (17) se obtiene

$$\varepsilon_i E_i 2\pi r L = Q. \qquad (18)$$

Ahora se calcula la diferencia de potencial entre los dos coaxiales

$$\begin{aligned} V(a) - V(c) = V_0 &= \int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} && (19) \\ &= \frac{Q}{\varepsilon_1 2\pi L} \log(b/a) + \frac{Q}{\varepsilon_2 2\pi L} \log(c/b) && (20) \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{2\pi L}{\frac{1}{\varepsilon_1}\log(b/a) + \frac{1}{\varepsilon_2}\log(c/b)}. \qquad (21)$$