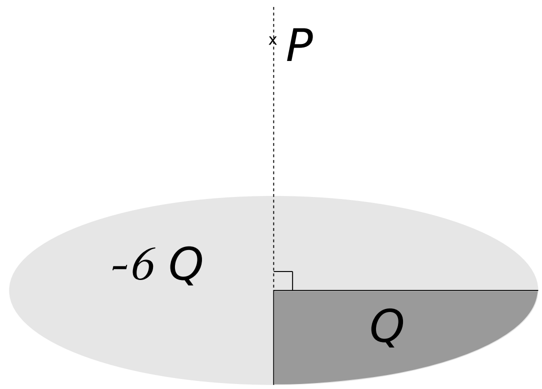
Problemas

1. Considere un disco de radio R. Tiene una carga positiva $+Q$ distribuida uniformemente sobre un cuarto de su área y una carga $-6Q$ distribuida uniformemente sobre el resto (ver figura abajo).

    a) Tomando como referencia $V = 0$ en infinito, calcule el potencial en un punto P a distancia z sobre el eje central del disco que se muestra en la figura.

    b) ¿En qué dirección apunta el campo eléctrico en P? Dado el potencial calculado en a), puede calcular el campo? ¿Qué información del campo puede obtener a partir de a)? Calcule dicha información.



a) El potencial creado por una superficie con densidad de carga σ está dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma\, dS}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \qquad \text{0.5 ptos}$$

En este problema $\vec{r} = z\hat{z}$, $\vec{r}' = \rho\hat{\rho}$, $dS = \rho d\rho d\theta$ y hay dos valores distintos de σ sobre el disco que llamaremos $\sigma = \sigma_1$ en $0 < \theta < \pi/2$ y $\sigma = \sigma_2$ en $\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$.
Entonces

$$V(z) = \frac{\sigma_1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{\pi/2}\frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2+z^2}} + \frac{\sigma_2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_{\pi/2}^{2\pi}\frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2+z^2}}. \qquad \text{1.5 ptos}$$

Hacemos primero la integral en θ y luego en ρ para obtener

$$V(z) = \frac{\sigma_1+3\sigma_2}{8\epsilon_0}\int_0^R\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \frac{\sigma_1+3\sigma_2}{8\epsilon_0}[\sqrt{R^2+z^2}-z], \qquad \text{1 pto}$$

donde hemos usado $\sqrt{z^2} = z$ ya que estamos considerando puntos en $z > 0$ solamente.
Ahora calculamos las densidades,

$$\sigma_1 = \frac{Q}{\pi R^2/4}, \qquad \sigma_2 = \frac{-6Q}{3\pi R^2/4}, \qquad \text{0.5 ptos}$$

con lo que finalmente resulta

$$\boxed{V(z) = -\frac{5Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}[\sqrt{R^2+z^2}-z].} \qquad \text{0.5 ptos}$$

b) (2 puntos distribuidos)

Como el disco no tiene simetría cilíndrica, el campo sobre el eje tendrá las tres componentes, E_x, E_y, E_z. Por los signos de las cargas se ve que el campo es un vector con componente E_z hacia abajo. Como solamente conocemos el potencial sobre el eje, solamente podemos calcular la derivada dV/dz y no podemos calcular la derivada dV/dx ni dV/dy ya que esto requeriría conocer V en un entorno fuera del eje.

La componente que podemos calcular es

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = \frac{5Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - 1\right).$$

Nota 1:

Puede calcular directamente el campo eléctrico a partir de

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r}-\vec{r}')\,dS}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

y usar $\int \hat{\rho} d\theta = \sin\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{y}$ para ver que las componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ no se anulan.

Nota 2

Otra manera de hacer la parte a) es calcular primero la componente E_z del campo eléctrico y luego calcular V a partir de

$$V(z) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{z} E_z dz$$

La componente $\hat{z}$ del campo eléctrico sobre el eje es

$$E_z(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma z\, dS}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\left[\sigma_1\frac{\pi}{2} + \sigma_2\frac{3\pi}{2}\right]$$

que resulta

$$E_z = \frac{5Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - 1\right).$$

y se obtiene de aquí

$$V(z) = -\int_{\infty}^{z} E_z dz = -\frac{5Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}[\sqrt{R^2+z^2} - z].$$

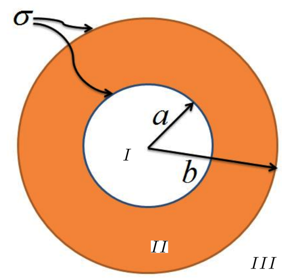
2. Las superficies interior ($r = a$) y exterior ($r = b$) de un cascarón esférico no conductor tienen la misma densidad de carga σ. La densidad de carga en el resto del espacio es nula.

   a) Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio ($0 < r < \infty$)

   b) Encuentre el potencial eléctrico en todo el espacio.

a) Por la simetría del problema podemos usar el teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico. Por la simetría esférica sabemos que el campo será de la forma $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$, y el flujo de este campo por una esfera cerrada de radio r es $4\pi r^2 E(r)$.

Llamemos I a la región $0 < r < a$, II a la región $a < r < b$ y III a la región $b < r$ como se muestra en la siguiente figura:



Aplicando el teorema de Gauss en una esfera de radio r en la región I, dado que la carga encerrada es nula obtenemos

$$\boxed{E_I(r) = 0.} \qquad \text{1 pto}$$

Aplicando a una esfera en la región II, dado que la carga encerrada es $4\pi a^2\sigma$, obtenemos

$$\boxed{\vec{E}_{II}(r) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2}\hat{r}} \qquad \text{1 pto}$$

y en la región III la carga encerrada es $4\pi a^2\sigma + 4\pi b^2\sigma$ de modo que

$$\boxed{\vec{E}_{III}(r) = \frac{\sigma(a^2+b^2)}{\epsilon_0 r^2}\hat{r}} \qquad \text{1 pto}$$

b) El potencial está dado por

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

de donde obtenemos

$$\boxed{V_{III}(r) = -\int_\infty^r \vec{E}_{III}\cdot d\vec{r} = \frac{\sigma(a^2+b^2)}{\epsilon_0 r},} \qquad \text{1 pto}$$

$$V_{II}(r) = -\int_\infty^b \vec{E}_{III}\cdot d\vec{r} - \int_b^r \vec{E}_{II}\cdot d\vec{r} = V_{III}(b) - \int_b^r \frac{\sigma a^2}{r^2}$$

que es

$$\boxed{V_{II}(r) = \frac{\sigma(a^2+b^2)}{\epsilon_0 b} + \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right).} \qquad \text{1 pto}$$

La expresión anterior se puede simplificar a

$$\boxed{V_{II}(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\left(b+\frac{a^2}{r}\right).}$$

y finalmente en la región interior,

$$V_I(r) = -\int_\infty^b \vec{E}_{III}\cdot d\vec{r} - \int_b^a \vec{E}_{II}\cdot d\vec{r} - \int_a^r \vec{E}_I\cdot d\vec{r} = V_{II}(a),$$

puesto que $E_I = 0$. Entonces en la región I el potencial es constante y vale

$$\boxed{V_I(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(b+a).} \qquad \text{1 pto}$$