Electricidad y Magnetismo - FIS1533

Interrogación 3

Martes 19 de Junio de 2012

PROFESORES: María Cristina Depassier, Max Bañados y Sebastián A. Reyes

---

Instrucciones
-Tiene dos horas para resolver los siguientes problemas.
-Sea claro y ordenado.
-Escriba los resultados finales de cada problema con lápiz pasta, de lo contrario perderá el derecho a recorrección.
-Todos los problemas tienen el mismo peso en la nota final.

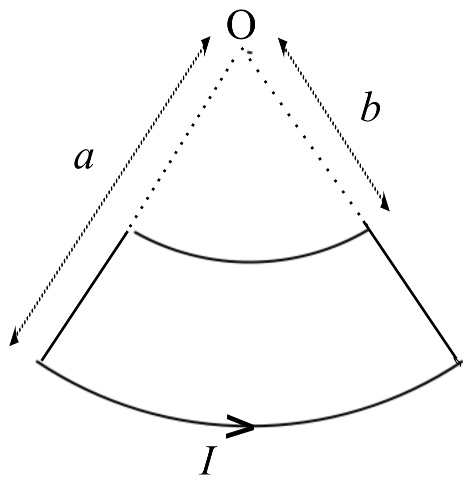
Problema 1

Por un circuito formado por dos arcos de círculo concéntricos de radios a y b unidos por dos segmentos radiales, como se muestra en la figura, circula una corriente I en el sentido indicado.

(a) Calcule el campo magnético que produce el arco de radio a en el punto O. (2 ptos.)

(b) Calcule el campo magnético que produce la espira completa en el punto O. (2 ptos.)

(c) Suponga ahora que se coloca un alambre de largo infinito que pasa por el punto O, perpendicular al plano de la espira y por el cual circula una corriente I_1 saliendo de la página. Calcule la fuerza que este alambre ejerce sobre el circuito. (2 ptos.)

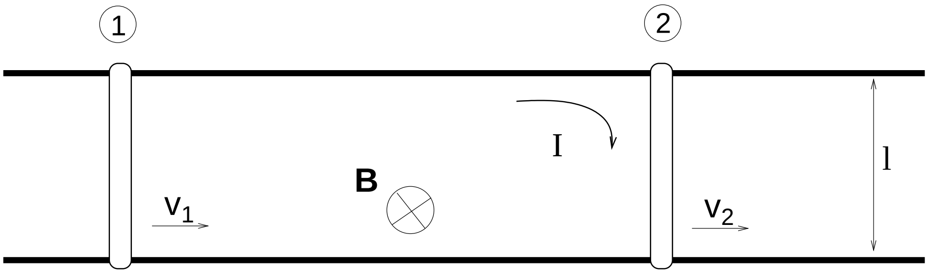


Problema 2 Se tienen dos rieles paralelos, perfectamente conductores y separados por una distancia l. Sobre ellos pueden deslizar libremente (sin roce) dos barras idénticas de masa m y resistencia R como se muestra en la figura. El sistema se encuentra sobre un plano horizontal y un campo magnético uniforme se aplica en la dirección vertical (ver figura). Supongamos que a la barra 1 se le aplica una fuerza tal que se mantiene moviéndose con una velocidad constante $\vec{v}_1 = v_0\hat{i}$ y que en $t = 0$ la velocidad de la barra 2 es cero. Desprecie la autoinducción.

(a) Tomando la dirección de la corriennte indicada en la figura como positiva, ¿en $t = 0$ es la corriente positiva o negativa? ¿Hacia qué lado acelera la barra 2 en ese instante? Argumente sus respuestas. (2 ptos.)

(b) Determine la fem inducida en la espira en términos de B, l, v_1 y v_2. (2 ptos.)

(c) Calcule $v_2(t)$ para $t > 0$. (2 ptos.)



Problema 3 Una bobina se contruye enrollando un cable conductor en círculos de radio a, a una razón de n_1 vueltas por unidad de altura de la bobina. Cuando se ha llegado a una altura $h \gg a$ comenzamos a enrollar el cable hacia abajo (en el mismo sentido y sobre el mismo eje a una razón de n_2 vueltas por unidad de altura de la bobina. Por el cable circula una corriente I como se muestra en la figura.

(a) Calcule el flujo por la bobina debido a su propio campo. (1 pto.)

(b) Calcule su autoinductancia L. (1,5 ptos.)

Suponga ahora que el radio interior es b tal como se muestra en la figura.

(c) Calcule el campo magnético en todo el espacio. (1,5 ptos.)

(d) Calcule su autoinductancia (2 ptos.)

Solución:

1. *a*) Para esta parte y para la parte (b) conviene usar la Ley de Biot-Savart para el campo magnético inducido por una corriente:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\vec{dl}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

En este caso $\vec{r} = \vec{0}$, $\vec{r}' = a\hat{r}$ y $\vec{dl} = a\hat{\theta}d\theta$ ($\hat{k}$ apunta hacia afuera del papel). Si llamamos α al ángulo que subtiende el arco tenemos

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 \alpha}{4\pi a}\hat{k}$$

donde se usó que $\hat{\theta} \times \hat{r} = -\hat{k}$.

b) Ahora, es importante observar que para los segmentos laterales, al calcular el campo que generan en O nos encontramos con que $\vec{dl}$ es paralelo a $(\vec{r} - \vec{r}')$. Por lo tanto, el producto "cruz" entre ambos es cero y estos segmentos no contibuyen al campo magnético. Tenemos entonces que el campo total generado por la espira es el generado por dos arcos concéntricos con radios a y b, que subtienden el mismo ángulo α pero cuyas corrientes circulan en sentidos opuestos. Es decir,

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 \alpha}{4\pi}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]\hat{k}.$$

c) Por la Ley de Ampere sabemos que el campo magnético generado por el alambre infinito en el plano de la espira será

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{\theta}.$$

Por otra parte, la fuerza que ejerce un campo magnético $\vec{B}$ sobre una espira con corriente I es

$$\vec{F} = \int I\vec{dl} \times \vec{B}.$$

Entonces, como los segmentos de arco de radios a y b son paralelos al campo producido por el alambre infinito el producto $\vec{dl} \times \vec{B}$ será nulo y no habrá fuerza alguna sobre ellos. Por otra parte, sobre los elementos radiales de la espira se ejercerá una fuerza en la dirección del eje "z". Es fácil ver que a pesar de que esta fuerza tiene igual magnitud para ambos segmentos, ésta se ejerce en direcciones opuestas debido al distinto sentido de la corriente. En conclusión la fuerza resultante que actúa sobre la espira es cero.

2. *a*) Cuando la barra 1 comienza a moverse (hacia la derecha), el área de la espira disminuye, y por lo tanto el flujo disminuye. La variación de flujo induce una

corriente, que de acuerdo a la Ley de Lenz, tiende a anular esta variación. Entonces, el campo magnético inducido debe apuntar en la misma dirección que el campo externo. Usando la regla de la mano derecha, concluímos que la corriente I será positiva. La fuerza que siente la barra 2, $\sim d\vec{l} \times \vec{B}$, apunta en la dirección de v_2, indicada en la figura. La barra 2 se mueve entonces hacia la derecha intentando aumentar el área, es decir intentando anular el cambio de flujo.

b) El flujo sobre la superficie definida por los rieles y las dos barras es,

$$\Phi = BA(t), \tag{1}$$

donde $A(t)$ es el área de la superficie. La fem asociada será,

$$\mathcal{E} = -B\frac{dA}{dt} = -B\ell(v_2(t) - v_1(t)) \tag{2}$$

donde ℓ es la separación entre las barras.

c) La corriente I satisface la Ley de Ohm. Puesto que hay dos resistencias R tenemos,

$$I = \mathcal{E}(2R) = -2RB\ell(v_2(t) - v_1(t)). \tag{3}$$

Por otro lado, la fuerza total sobre la barra 2 será

$$\begin{aligned} m\frac{dv_2}{dt} = F &= \ell BI \\ &= -2RB^2\ell^2(v_2 - v_1) \end{aligned} \tag{4}$$

Esta ecuación determina la velocidad $v_2(t)$ (recordemos que v_1 es constante). La solución de esta ecuación con la condición inicial $v_2(t = 0) = 0$ es:

$$v_2(t) = v_1\left(1 - e^{-\frac{2RB^2\ell^2}{m}t}\right) \tag{5}$$

donde observamos que para un tiempo largo la barra 2 se moverá con la misma velocidad que la barra 1.

3. El campo en el interior de una bobina (cuyo eje coincide con el eje $\hat{z}$) es constante y tiene el valor,

$$\vec{B} = \mu_0 \, n \, I \, \hat{z}. \tag{6}$$

Aquí I es la corriente y n el número de vueltas por unidad de altura.

a) Puesto que ambos enrrollamientos son en la misma dirección, los campos de ambas bobinas apuntan en la misma dirección. El campo total es:

$$\vec{B} = \mu_0(n_1 + n_2)I\hat{z}. \tag{7}$$

El flujo a través de una espira es:

$$\Phi_1 = \pi a^2 \mu_0 (n_1 + n_2) I. \tag{8}$$

El número total de espiras es $N = (n_1 + n_2)h$, por lo tanto el flujo total será

$$\Phi_T = \pi a^2 \mu_0 (n_1 + n_2)^2 h I \tag{9}$$

b) Directamente del cálculo antrerior deducimos que la autoinductancia de esta bobina compuesta es:

$$L = \pi a^2 \mu_0 (n_1 + n_2)^2 h \tag{10}$$

c) En la zona exterior $r > a$ el campo es cero. En la zona intermedia $a > r > b$ solo la bobina exterior contribuye al campo y se tiene,

$$\vec{B}_1 = \mu_0 n_1 I \hat{z}, \qquad (b < r < a) \tag{11}$$

En la zona interna $(r < b)$, ambas bobinas contribuyen y se obtiene

$$\vec{B}_2 = \mu_0 (n_1 + n_2) I \hat{z}, \qquad (r < b) \tag{12}$$

d) Consideremos una espira de la bobina exterior. El flujo que atraviesa esta espira es:

$$\begin{aligned} \Phi_{1,e} = \; &= \pi(a^2 - b^2)B_1 + \pi b^2 B_2 \\ &= \pi \mu_0 I_0 \Big(a^2 n_1 + b^2 n_2 \Big) \end{aligned} \tag{13}$$

(B_1 y B_2 son los campos calculados en la parte (c)). Puesto que hay $n_1\,h$ espiras en la bobina exterior, el flujo total a través de ella es:

$$\Phi_{T,e} = \pi \mu_0 I h n_1 \Big(a^2 n_1 + b^2 n_2 \Big) \tag{14}$$

Del mismo modo, el flujo que atraviesa una espira de la bobina interior es

$$\begin{aligned} \Phi_{1,i} &= \pi b^2 B_2 \\ &= \pi b^2 \mu_0 I (n_1 + n_2) \end{aligned} \tag{15}$$

y el flujo sobre toda la bobina interior (que tiene $n_2 h$ espiras) será

$$\Phi_{T,i} = \pi b^2 \mu_0 (n_1 + n_2) n_2 h I$$

Finalmente el flujo total que cruza la bobina compuesta será:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_{T,i} + \Phi_{T,e} \\ &= \pi \mu_0 h I \Big(a^2 n_1^2 + 2 n_1 n_2 b^2 + n_2^2 b^2 \Big) \end{aligned} \tag{16}$$