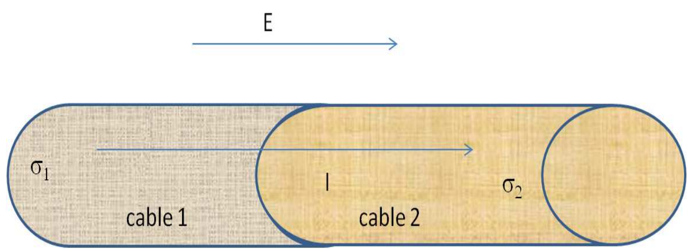
Electricidad y Magnetismo - Primavera 2012
Prof. Máximo Bañados

Interrogación 2

Tiempo: 2:00 horas - **Sin apuntes**.

PROBLEMAS:

1. Dos cables eléctricos de distinta conductividad σ_1 y σ_2 e igual sección transversal A están unidos longitudinalmente (ver figura). Asuma que $\sigma_1 > \sigma_2$. En todo el espacio hay un campo eléctrico $\vec{E}$ paralelo a los cables.



Una corriente I circula longitudinalmente por este cable compuesto. La corriente es la misma en ambos lados. Se observa que una densidad de carga superficial σ_0 se acumula en la interfase de área A que une los dos cables. (No confunda la densidad superficial σ_0 con las conductividades σ_1, σ_2.) Considere la interfase como un plano infinito. De este manera, el campo eléctrico generado por la carga acumulada es $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\hat{n}$. Recuerde que $I = JA$ y $J = \sigma E$.

(a) Determine el campo eléctrico total (debido al campo externo $\vec{E}$, y a la distribución de carga en la interfase) en las regiones 1 y 2.

(b) Derive una expresión para la carga superficial σ_0 en función de σ_1, σ_2 y el campo externo aplicado. Ayuda: note que la corriente I es la misma en ambos cables.

Solución:

(a) Sobre la interfase se acumula una densidad superficial σ_0. El campo eléctrico debido a esta carga es $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\hat{n}$ donde $\hat{n}$ es normal a la superficie. Por esta razón, en la zona del cable 2, ambos campos (el campo externo y el campo debido a σ_0) apuntan en la misma dirección, mientras que en la zona 1, se oponen. Concluimos,

$$E_1 = E - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}, \qquad E_2 = E + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \tag{1}$$

(b) La densidad de corriente en cada zona entonces es

$$J_1 = \sigma_1 \left(E - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \right), \qquad J_2 = \sigma_2 \left(E + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \right) \tag{2}$$

Ahora, las corrientes son iguales, y puesto que las areas también son iguales concluimos que debe cumplirse la relación,

$$\sigma_1 \left(E - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \right) = \sigma_2 \left(E + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \right)$$

de donde se deduce

$$\sigma_0 = 2E\sigma_0 \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

2. Tres placas conductoras perfectas, idénticas, planas y de área A se disponen en forma paralela como se muestra en la figura. La distancia entre las placas 1 y 2 es d, mientras que la distancia entre 2 y 3 es $2d$. Una fem (diferencia de potencial) de magnitud V_0 se conecta entre las placas superior e inferior.

   Supongamos primero que el espacio entre las placas se encuentra vacío:

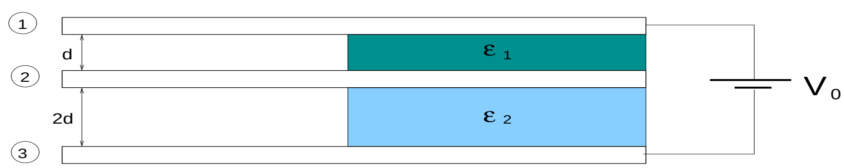
   (a) Determine la capacidad equivalente C_{eq} entre los terminales 1 y 3. (1,5 ptos.)

   (b) Encuentre la densidad de carga σ inducida en la parte inferior de 2 y la caída de potencial entre 2 y 3 (V_{23}). (1,5 ptos.)

   Supongamos ahora que la mitad del espacio entre las placas se llena con un dieléctrico de permitividad ϵ_1 para 1-2 y ϵ_2 para 2-3 (ver figura):

   (c) Determine la capacidad equivalente C'_{eq} entre los terminales 1 y 3. (1,5 ptos.)

   (d) Encuentre la densidad de carga de polarización σ_P en la cara inferior del dieléctrico ubicado entre 2 y 3. (1,5 ptos.)



Solución:

(a) Primero, recordemos que la capacidad de un condensador de placas paralelas de área A y que se encuentran a una distancia d es

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}.$$

Cuando tenemos tres placas paralelas el sistema corresponde a dos condensadores conectados en serie. Es decir,

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d}{\epsilon_0 A} + \frac{2d}{\epsilon_0 A} \quad \rightarrow \quad C_{eq} = \frac{\epsilon_0 A}{3d}.$$

(b) Sabemos que la carga inducida en la cara inferior de la placa 1 al conectar la fem será,

$$Q = C_{eq} V_0 = \frac{\epsilon_0 A V_0}{3d}.$$

Ahora, sabemos que la carga en la parte superior de la placa 2 debe ser entonces $-Q$. Por último, como la placa 2 es neutra la carga de su cara inferior de be ser Q. Finalmente la densidad de carga pedida es

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{\epsilon_0 V_0}{3d}.$$

(c) Al insertar los trozos de dieléctrico las capacidades entre 1 y 2 y entre 2 y 3 se componen de dos condensadores de dos condensadores de área $A/2$ conectados en paralelo. Tenemos,

$$C_1' = \frac{\epsilon_0 A/2}{d} + \frac{\epsilon_1 A/2}{d} = \frac{(\epsilon_0+\epsilon_1)A}{2d}; \quad C_2' = \frac{\epsilon_0 A/2}{2d} + \frac{\epsilon_2 A/2}{2d} = \frac{(\epsilon_0+\epsilon_2)A}{4d}.$$

Como a su vez estos dos condensadores están conectados en serie tenemos,

$$\frac{1}{C_{eq}'} = \frac{1}{C_1'} + \frac{1}{C_2'} = \frac{2d}{(\epsilon_0+\epsilon_1)A} + \frac{4d}{(\epsilon_0+\epsilon_2)A} \quad \rightarrow \quad C_{eq}' = \frac{(\epsilon_0+\epsilon_1)(\epsilon_0+\epsilon_2)A}{2d(3\epsilon_0+2\epsilon_1+\epsilon_2)}.$$

(d) Determinemos primero la diferencia de potencial entre las placas 2 y 3. Sea V_{12} y V_{23} las caidas de potencial entre $1,2$ y $2,3$, respectivamente. Puesto que las cargas en las placas de los condensadores son iguales se tienen las ecuaciones

$$V_{12} + V_{23} = V_0, \quad C_1' V_{12} = C_2' V_{23} \tag{3}$$

donde C_1' y C_2' son las capacidades equivalentes de cada condensador, calculadas en la parte (c). Tenemos entonces dos ecuaciones para las incógnitas V_{12} y V_{23}. Nos interesa V_{23} cuya solución es:

$$V_{23} = \frac{2(\epsilon_0+\epsilon_1)}{3\epsilon_0+2\epsilon_1+\epsilon_2} V_0$$

La carga de polarización en la superficie de constante ϵ_2 es igual a la polarización en ese dieléctrico, entonces,

$$\begin{aligned}
\sigma_{2p} &= P_2 \\
&= \epsilon_0 \chi_{e2} E_2 \\
&= \epsilon_0 \chi_{e2} \frac{V_{23}}{2d} \\
&= \epsilon_0(\epsilon_{r2}-1)\frac{(\epsilon_0+\epsilon_1)}{d(3\epsilon_0+2\epsilon_2+\epsilon_2)} V_0 \\
&= \frac{(\epsilon_2-\epsilon_0)(\epsilon_0+\epsilon_1)}{d(3\epsilon_0+2\epsilon_2+\epsilon_2)} V_0
\end{aligned}$$

3. Un objeto (cable) de largo L, sección transversal A, y conductividad σ tiene una resistencia $R = \frac{L}{\sigma A}$. Para un objeto de sección transversal variable $A(x)$ la fórmula adecuada es

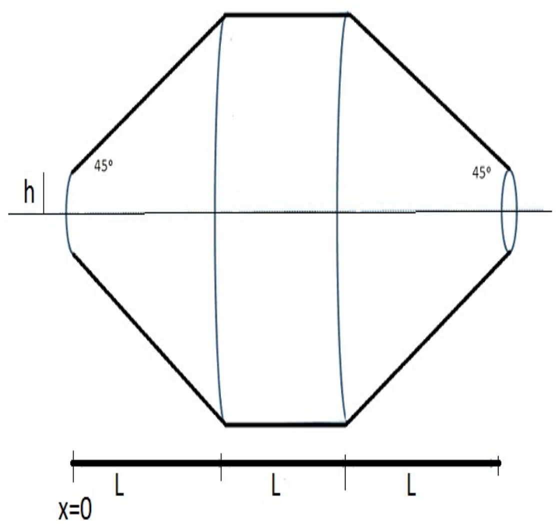
$$R = \int \frac{dx}{\sigma A(x)}.$$

Considere un objeto volumétrico de conductividad uniforme σ. El objeto consta de dos secciones cónicas y un cilindro que une los conos. Cada cono tiene un radio mínimo h y un radio máximo $L + h$. El cilindro entre los conos tiene radio $L + h$ y largo L (ver figura). Una corriente I circula por este objeto horizontalmente a lo largo del eje de simetría.

(a) Considere el cono de la izquierda. Demuestre que el área de la sección transversal a la corriente es $A(x) = \pi(x + h)^2$, donde x es una coordenada horizontal medida desde el inicio del cono.

(b) Determine la resistencia de este cono (cono de la izquierda).

(c) Determine la resistencia total del objecto.



Solución

(a) La resistencia sobre el cono de la izquierda se encuentra directamente de la fórmula entregada,

$$\begin{aligned} R_{cono} &= \int_0^L \frac{dx}{\sigma\pi(x+h)^2} \\ &= \frac{L}{\sigma\pi h(L+h)} \end{aligned} \quad (4)$$

(b) dada la simetría del problema, el cono 2 (derecha) tendrá exactamente la misma resistencias. Finalmente la resistencia del cilindro es:

$$R_{cilindro} = \frac{L}{\sigma\pi(L+h)^2}$$

Las tres components pueden ser interpretados como resistencias en serie y entonces la resistencia total es:

$$R = 2 \times \frac{L}{\sigma\pi h(L+h)} + \frac{L}{\sigma\pi(L+h)^2} = \frac{L}{\sigma\pi h}\frac{3h+2L}{(h+L)^2}$$