Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 - Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Alonso Ruiz (airuiz@uc.cl)

Ayudantía 8

Problema 1

Considere inicialmente 2 condensadores iguales, ambos con carga Q y capacitancia C_0 conectados en paralelo a una diferencia de potencial V. Después de un rato se introduce un dieléctrico en uno de los condensadores como de ve en la figura 1, de modo que no queda espacio vacío en ese condensador. Encuentre:

a) Las nuevas capacitancias y las nuevas cargas después de que se introdujo el dieléctrico.

b) La energía del nuevo sistema.

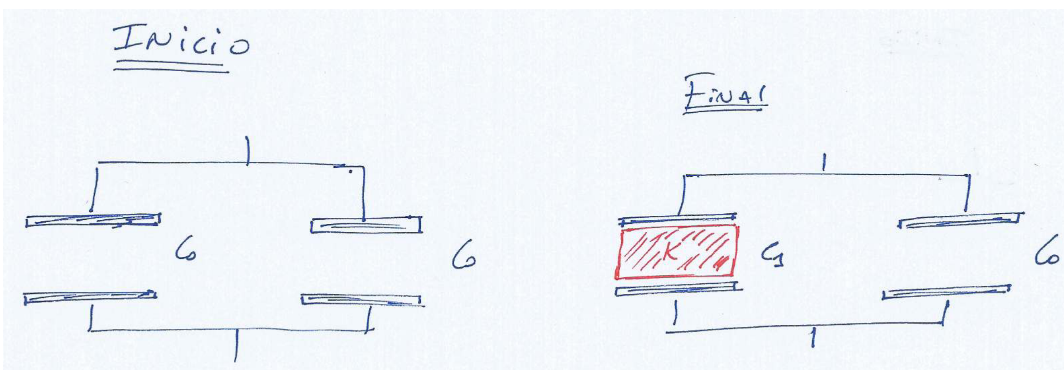

Figura 1:

Solución

a) Dado que son condensadores de placas paralelas el condensador que no tiene dieléctrico sigue con capacitancia C_0, mientras que al condensador que se le colocó un dieléctrico ahora tiene capacitancia $C_1 = kC_0$.

Por conservación de la carga se tiene la siguiente ecuación:

$$Q_1 + Q_2 = 2Q \tag{1}$$

donde Q_1, Q_2 son las cargas de los condensadores con y sin dieléctrico respectivamente. Dado que los condensadores están al mismo potencial se cumple lo siguiente:

$$V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_0} \quad \Rightarrow \quad Q_1 = kQ_2 \tag{2}$$

ya que $C_1/C_0 = k$. Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (2) y (1) se encuentra que las cargas son:

$$Q_1 = \frac{2kQ}{1+k} \tag{3}$$

$$Q_2 = \frac{2Q}{1+k} \tag{4}$$

b) La energía para un condensador es $U = (CV^2)/2$, luego la energía del sistema va a venir dada por la suma de las energías de cada condensador, con lo que se tiene:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}C_1V^2 + \frac{1}{2}C_0V^2 \\ &= \frac{1}{2}(1+k)C_0V^2 \end{aligned}$$

Problema 2

Se tienen 2 cascarones esféricos concentricos, el interior de radio a y carga $+Q$ y el exterior de radio b y carga $-Q$. Se llena la mitad del espacio entre los cascarones con un dieléctrico de constante dieléctrica k, tal como se ve en la figura 2. Encuentre:

a) La capacitancia del sistema.

b) Las densidades de carga superficiales en cada hemisferio.

Solución

a) Dado que los cascarones son conductores, estos están al mismo potencial, por lo tanto se puede considerar el sistema como 2 condensadores conectados en paralelo, con lo que la capacitancia va a venir dada por:

$$C_{eq} = C_u + C_d \tag{5}$$

donde C_u es la capacitancia del hemisferio superior (*up*) y C_d es la capacitancia del hemisferio inferior (*down*). La capacitancia de cada hemisferio va a corresponder a la mitad de la capacitancia

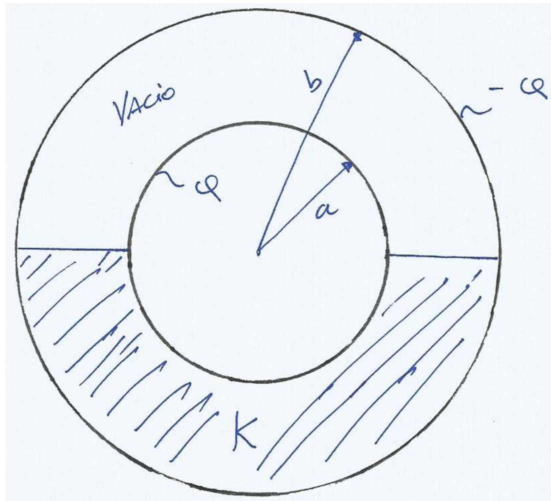

Figura 2:

del condensador completo porque el área se reduce a la mitad. Llamando a la capacitancia del condensador completo sin diélectrico como C_0, se tiene que:

$$C_u = \frac{C_0}{2} \tag{6}$$

$$C_d = \frac{kC_0}{2} \tag{7}$$

donde k aparece porque en el hemisferio inferior se tiene un dieléctrico. Para calcular C_0 se necesita el campo entre los cascarones, que por ley de Gauss es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \tag{8}$$

Tomando la integral de camino desde $r = a$ hasta $r = b$ (el potencial entre a y b) en una curva radial ($d\vec{l} = dr\hat{r}$) se tiene:

$$\Delta V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right) \tag{9}$$

Reordenando un poco los términos se encuentra:

$$C_0 = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right) \tag{10}$$

Por lo tanto las capacitancias son:

$$C_u = 2\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a}\right) \tag{11}$$

$$C_d = 2\pi k\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a}\right) \tag{12}$$

b) Se tiene 4 superficies y por lo tanto 4 densidades superficiales de carga:

1. σ_1: hemisferio superior del cascaron interior.
2. σ_2: hemisferio inferior del cascaron interior.
3. σ_3: hemisferio superior del cascaron exterior.
4. σ_4: hemisferio inferior del cascaron exterior.

Dado que la densidad superficial de carga viene dada por $\sigma = Q/A$, donde Q es la carga en la superficie y A el área de esta, entonces debemos encontrar la carga que hay en cada hemisferio. Para el cascarón interior se tiene por conservación de la carga

$$Q_u + Q_d = Q \tag{13}$$

donde Q_u, Q_d son las cargas en lo hemisferios superior e inferior respectivamente. Usando que la diferencia de potencial es constante se encuentra además:

$$\frac{Q_d}{C_d} = \frac{Q_u}{C_u} \quad \Rightarrow \quad Q_d = kQ_u \tag{14}$$

Resolviendo (14) y (13) se encuentra que:

$$Q_u = \frac{Q}{1+k} \qquad y \qquad Q_d = \frac{kQ}{1+k} \tag{15}$$

Para el cascaron exterior es lo mismo, con la diferencia de que $Q \to -Q$. Con esto las densidades de carga son:

$$\sigma_1 = \frac{Q_u}{2\pi a^2} = \frac{Q}{2\pi a^2(1+k)} \tag{16}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_d}{2\pi a^2} = \frac{kQ}{2\pi a^2(1+k)} \tag{17}$$

$$\sigma_3 = \frac{-Q_u}{2\pi b^2} = \frac{-Q}{2\pi b^2(1+k)} \tag{18}$$

$$\sigma_4 = \frac{-Q_d}{2\pi b^2} = \frac{-kQ}{2\pi b^2(1+k)} \tag{19}$$

Problema 3

Se tiene un condensador de placas paralelas, en el cual se hay un dieléctrico con constante dieléctrica $k(x)$ y placas de area A separadas por una distancia d, tal como se ve en la figura 3.

a) Encuentre una expresión para la capacitancia de forma general.

b) Suponga que el dieléctrico se divide en 2, uno de ancho d_1 y constante dieléctrica k_1 y el otro de ancho d_2 y de constante dieléctrica k_2. Además se tiene que k_1 se relaciona con k_2 de la siguiente forma:

$$k_1 = \frac{2d_1}{x + d_1} k_2 \qquad y \qquad k_2 = cte \tag{20}$$

Encuentre la capacitancia de este nuevo sistema.

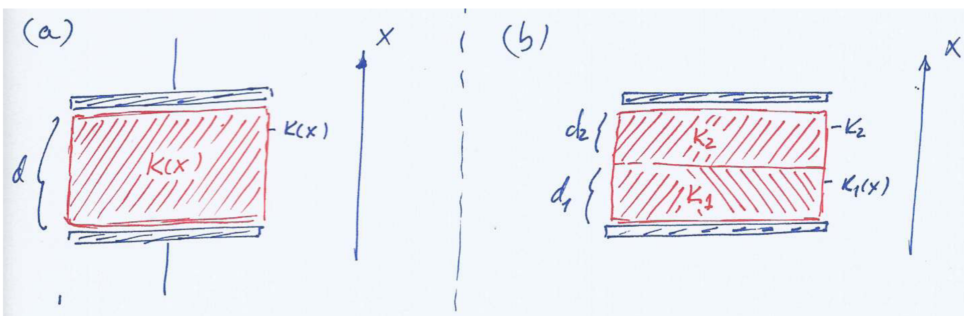

Figura 3:

Solución

a) Dado que se tiene un dieléctrico, entonces $\epsilon_0 \to k\epsilon_0$, donde en este caso k es una función de x. El campo eléctrico dentro del condensador va a pasar a ser:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(-\hat{x}) \quad \to \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{k(x)\epsilon_0}(-\hat{x}) \tag{21}$$

con $\sigma = Q/A$ la densidad de carga. El lado izquierdo es el campo sin dieléctrico y el lado derecho es el campo con dieléctrico (Se asumió que la placa de arriba tiene carga $+Q$ y la de abajo $-Q$, por eso la dirección del campo es $-\hat{x}$). Integrando el campo eléctrico desde $x = 0$ hasta $x = d$ se tiene que $d\vec{l} = dx\hat{x}$, por lo tanto:

$$\Delta V = -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^d \frac{Q}{A\epsilon_0 k(x)} dx = \frac{Q}{A\epsilon_0} \int_0^d \frac{dx}{k(x)} \tag{22}$$

Reordenando los términos se tiene que:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = A\epsilon_0 \left[\int_0^d \frac{dx}{k(x)}\right]^{-1} \tag{23}$$

b) La única diferencia con (a) es que ahora si se conoce $k(x)$, por lo tanto lo único que hay que hacer es resolver la integral de (23). Entonces:

$$\int_0^d \frac{dx}{k(x)} = \int_0^{d_1} \frac{x + d_1}{2d_1 k_2} dx + \int_{d_1}^d \frac{1}{k_2} dx = \frac{1}{k_2} \frac{3d_1 + 4d_2}{4} \tag{24}$$

Con $d_2 = d - d_1$. Por lo tanto la capacitancia va a ser:

$$C = \frac{4k_2\epsilon_0 A}{3d_1 + 4d_2} \tag{25}$$