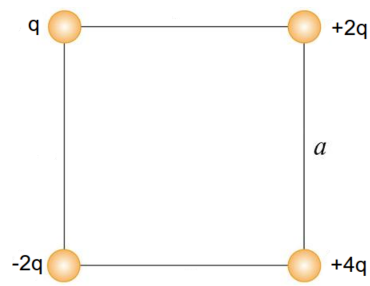
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 - Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Alonso Ruiz (airuiz@uc.cl)

Ayudantía 6

Problema 1

Encuentre el trabajo necesario para colocar 4 cargas en los vértices de un cuadrado de lado a, tal como se muestra en la figura .



Solución

La energía de un conjunto discreto de cargas (el trabajo que cuesta armar el sistema) va a venir dada por:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \phi(\vec{r_i}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} U_i \tag{1}$$

donde $\phi(\vec{r_i})$ es el potencial debido a todas las cargas presentes menos la i-ésima cuando se traen una por una desde infinito hasta la posición donde estan. Si nombramos las cargas como $q_1 = q$, $q_2 = 2q$, $q_3 = -2q$ y $q_4 = 4q$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\text{para } q_1: \quad & \phi(\vec{r_1}) = 0 \\
& \Rightarrow U_1 = 0 && (2)\\
\text{para } q_2: \quad & \phi(\vec{r_2}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|} \\
& \Rightarrow U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q^2}{a} && (3)\\
\text{para } q_3: \quad & \phi(\vec{r_3}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_1}{|\vec{r_1}-\vec{r_3}|}+\frac{q_2}{|\vec{r_2}-\vec{r_3}|}\right] \\
& \Rightarrow U_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2q^2}{a}-\frac{4q^2}{a\sqrt{2}}\right] && (4)\\
\text{para } q_4: \quad & \phi(\vec{r_4}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_1}{|\vec{r_1}-\vec{r_4}|}+\frac{q_2}{|\vec{r_2}-\vec{r_4}|}+\frac{q_3}{|\vec{r_3}-\vec{r_4}|}\right] \\
& \Rightarrow U_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{4q^2}{a\sqrt{2}}+\frac{8q^2}{a}-\frac{8q^2}{a}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4q^2}{a\sqrt{2}} && (5)
\end{aligned}
$$

Por último si sumamos todos los U_i nos queda que la energía total del sistema es:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[0+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q^2}{a}-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q^2}{a}-\frac{4q^2}{a\sqrt{2}}+\frac{4q^2}{a\sqrt{2}}\right] = 0 \tag{6}$$

Por lo tanto no se gasta energía en armar la configuración que se muestra en la figura.

Problema 2

Encuentre la energía almacenada en una esfera de radio a y densidad constante ρ.

Solución

La energía para una distribución de carga continua es:

$$U = \frac{1}{2}\int_{Esfera}\rho\phi_{int}\, dV \tag{7}$$

donde ϕ_{int} es el potencial dentro de la esfera. Para calcular el potencial dentro de la esfera, primero calculamos el campo al interior de la esfera con la ayuda de la ley de Gauss:

$$
\begin{aligned}
\int \vec{E}_{int}\cdot d\vec{S} &= \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho dV && (8)\\
E_{int}(r)\cdot 4\pi r^2 &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho 4\pi\frac{r^3}{3} && (9)\\
E_{int} &= \frac{\rho r}{3\epsilon_0} && (10)
\end{aligned}
$$

Donde se uso que que $\vec{E} = E_{int}(r)\hat{r}$ dentro de la esfera por simetría y como superficie gaussiana se ocupo una esfera de radio r. Si tenemos en cuenta que $\vec{E} = \vec{\nabla}\phi$, entonces se tiene:

$$\vec{E}_{int} = -\frac{\partial \phi_{int}}{\partial r}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \phi_{int} = -\int \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \phi_0 \tag{11}$$

donde ϕ_0 es una constante de integración por determinar. Para determinar ϕ_0 se usa el hecho de que el potencial es continuo, es decir:

$$\phi_{int}(r = a) = \phi_{ext}(r = a) \tag{12}$$

donde ϕ_{ext} es el potencial del exterior de la esfera. Para determinar ϕ_{ext} lo hacemos de la misma manera que ϕ_{int}, es decir, usando la ley de Gauss:

$$\int \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \tag{13}$$

$$E_{ext}(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{14}$$

$$E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{15}$$

donde se uso que $\vec{E}_{ext} = E_{ext}(r)\hat{r}$ por simetría y Q igual a la carga total de la esfera. Como $\vec{E} = \vec{\nabla}\phi$ entonces se tiene que:

$$\vec{E}_{ext} = -\frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \phi_{ext} = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \phi_1 \tag{16}$$

donde ϕ_1 es una nueva constante de integración, la cual podemos eliminar haciendo que $\phi_{ext}(r \to \infty) = 0$, lo que da $\phi_1 = 0$. Con esto podemos aplicar la condición (12) y se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{\rho a^2}{6\epsilon_0} + \phi_0 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \qquad \text{usando } Q = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi a^3 \\ \phi_0 &= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} + -\frac{\rho a^2}{6\epsilon_0} \\ \phi_0 &= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

con lo que se encuentra:

$$\phi_{int} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \tag{17}$$

Por ultimo para encontrar la energía de la esfera se reemplaza ϕ_{int} en (7):

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int_{Esfera}\rho\phi_{int}\ dV \\
&= \frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\left[-\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}+\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\right] r^2 sin\theta drd\theta d\phi \\
&= \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

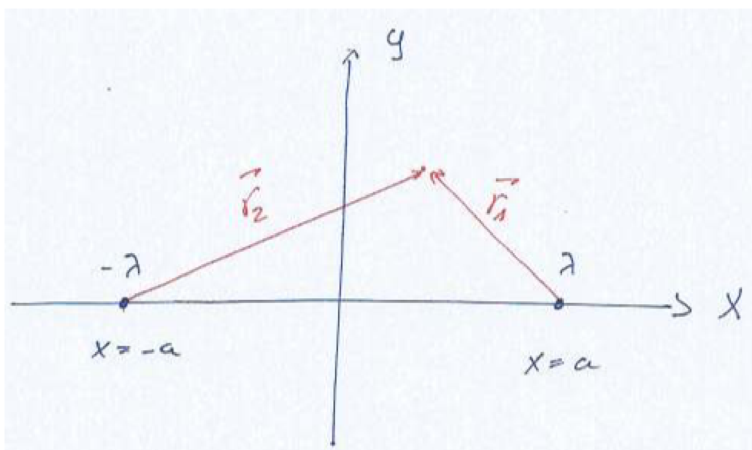
Nota: La energía también se puede calcular usando la siguiente ecuación:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{E}|^2 dV$$

Notar que ahora es una integral sobre todo el espacio y no solo sobre el cuerpo como en la ecuación (7).

Problema 3

Considere un par de alambres infinitos ubicados en $x = a$ y $x = -a$ con densidades de carga constantes $+\lambda$ y $-\lambda$ respectivamente. Calcule las superficies equipotenciales.



Solución

El campo eléctrico para un alambre que pasa por el origen viene dado por:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} \tag{18}$$

Y si usamos que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, entonces se tiene que:

$$\vec{E} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \phi = -\int_{r_0}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r'} dr' \tag{19}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \tag{20}$$

donde r_0 es simplemente un radio tal que $\phi(r_0) = 0$. Si usamos el principio de superposición, entonces el potencial generado por los 2 alambres es:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \tag{21}$$

donde ϕ_1, ϕ_2 son los potenciales generados por los alambres con $+\lambda, -\lambda$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi_1 + \phi_2 \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)
\end{aligned}$$

Con r_1 la distancia al alambre en $x = a$ y r_2 la distancia al alambre en $x = -a$. Para encontrar las superficies equipotenciales hacemos $\phi = h = cte$, luego se encuentra:

$$\frac{r_2}{r_1} = \beta \qquad \text{con } \beta = \exp(2\pi\epsilon h/\lambda) \tag{22}$$

Expresando r_1 y r_2 en coordenadas cartesianas y elevando al cuadrado la expresión anterior, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
(x+a)^2 + y^2 - \beta^2[(x-a)^2 - y^2] &= 0 \\
x^2 + 2ax + a^2 - \beta^2(x^2 - 2ax + a^2) + (1-\beta^2)y^2 &= 0 \\
(1-\beta^2)x^2 + 2ax(1+\beta^2) + (1-\beta^2)a^2 + (1-\beta^2)y^2 &= 0 \\
x^2 + 2ax\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} + a^2\frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)^2} + a^2 + y^2 &= a^2\frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)^2} \\
\left[x - a\frac{\beta^2+1}{\beta^2-1}\right]^2 + y^2 &= \frac{4a^2\beta^2}{(1-\beta^2)^2}
\end{aligned}$$

Esta es la ecuación de un círculo con centro en (x_c, y_c) y radio r_c dados por:

$$(x_c, y_c) = \left(a\frac{\beta^2+1}{\beta^2-1},\ 0\right) \qquad r_c = \frac{2a\beta}{1-\beta^2}$$

Si $\beta < 1$ los círculos quedan hacia la izquierda del eje x y si $\beta > 1$ quedan a la derecha del eje y.