Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 - Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Alonso Ruiz (airuiz@uc.cl)

Ayudantía 2

Problema 1

Se tiene un alambre infinito con densidad de carga uniforme λ. Rodeando al alambre se encuentran un corteza cilíndrica infinita de radio interior a y radio exterior b, la cual tiene la siguiente densidad de carga:

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{r^3}$$

Con α una constante cualquiera. Calcule el campo eléctrico en todo el espacio.

Solución

Lo primero que vemos son las simetrías del problema las cuales son:

- Invariancia por traslación en el eje z.
- Invariancia por rotación en torno a φ.
- Las densidades de carga o son constantes o dependen solo del radio.

A partir de esto podemos reducir las 3 componentes del campo eléctrico a solo una, de modo que este tiene la siguiente forma:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r} \tag{1}$$

Entonces usando la ley de Gauss con un cilindro de radio r y largo L se tiene que:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{manto} + \int_{Tapa1} + \int_{Tapa2} \qquad \begin{array}{l} \text{con } d\vec{S} = rd\varphi dz(\hat{r}) \text{ en el manto} \\ \text{con } d\vec{S} = rdrd\varphi(\pm\hat{z}) \text{ en las tapas} \end{array}$$

El flujo se anula en las tapas porque $\vec{E} \perp d\vec{S}$ por lo tanto se tiene solo el flujo en el manto, el cual es:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^L \int_0^{2\pi} E(r) r d\varphi dz = E(r)r \cdot 2\pi L \tag{2}$$

Con esto el campo eléctrico tiene como modulo:

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 Lr} Q_{enc} \tag{3}$$

Solo falta calcular la carga encerrada Q_{enc}, para lo cual distinguimos las siguientes 3 regiones:

(I) $r < a$

Aquí la carga encerrada es simplemente:

$$Q_{enc} = \int_0^L \lambda dz = \lambda L \tag{4}$$

por lo tanto usando (3), el modulo del campo eléctrico es:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{5}$$

(II) $a < r < b$

Aquí la carga encerrada es:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= Q_{alambre} + Q_{cilindros} \\ &= \lambda L + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^r \frac{\alpha}{r'^3} r' dr' d\varphi dz \\ &= \lambda L + 2\pi\alpha L \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

y reemplazando en (3):

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \left[\lambda + 2\pi\alpha \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right] \tag{6}$$

(III) $r > b$

Es similar el punto (II), solo que en la integral de los cilindros solo hay que reemplazar r por b, por lo que queda:

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \left[\lambda + 2\pi\alpha \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right] \tag{7}$$

Resumiendo el campo en las 3 zonas:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \qquad \text{para } r < a \\ \vec{E} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \left[\lambda + 2\pi\alpha \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right] \hat{r} \qquad \text{para } a < r < b \\ \vec{E} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \left[\lambda + 2\pi\alpha \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right] \hat{r} \qquad \text{para } r > b \end{aligned}$$

Nota: recordar que el campo eléctrico es un vector, por lo tanto siempre debe llevar la dirección, y no solo el modulo.

Problema 2

Considere una esfera de radio R y carga positiva Q con densidad de carga uniforme. En el interior de la esfera se introduce una carga puntual de masa m y carga $-q$.

a) Demuestre que la posición de equilibrio para la carga $-q$ es el centro de la esfera.

b) Demuestre que si la carga $-q$ que esta en el centro de la esfera es desplazada de su posición de equilibrio a una distancia menor que R, entonces esta oscila en torno al centro con movimiento armónico simple. Calcule la frecuencia de oscilación.

Solucion

a) Un punto de equilibrio va a ser donde $\vec{F} = 0$, o dado que es una carga, se tiene $\vec{F} = -q\vec{E}$, por lo tanto un punto de equilibrio va a ser donde $\vec{E} = 0$.

Antes de calcular el campo eléctrico nos damos cuenta de las simetrías del problema, dado que la densidad de carga es uniforme, esto nos indica que no importa hacia donde orientemos el sistema de referencia, la densidad de carga siempre es la misma, por lo tanto el campo eléctrico no depende de θ ni de φ y este apunta en la dirección $\hat{r}$, es decir, $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Ahora calculamos la densidad de carga:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \tag{8}$$

Ahora nos aprovechamos de las simetrías del problema usando la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico, para lo cual usamos como superficie Gaussiana una esfera de radio r y centrada en el origen, con lo que se tiene que $d\vec{S} = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \hat{r}$ y reemplazando en la ley de Gauss:

$$\begin{aligned}
\int \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\
\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(r) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \hat{r} \cdot \hat{r} &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r} \rho r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\varphi \\
E(r) r^2 4\pi &= \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi \int_0^{r} \frac{3Q}{4\pi R^3} r'^2 dr' \\
E(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}
\end{aligned}$$

Entonces el campo eléctrico es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \hat{r} \tag{9}$$

Por lo tanto el único punto para el cual $\vec{E} = 0$ es $r = 0$.

b) Usando Newton sobre la carga $-q$ se tiene que:

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{10}$$

$$ma_r\hat{r} = -q\vec{E} \tag{11}$$

$$ma_r\hat{r} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} r\hat{r} \tag{12}$$

Aquí se ve que la fuerza es proporcional y contraria al desplazamiento (ecuación oscilador armónico) por lo tanto se concluye que se trata de un movimiento armónico simple.

Para calcular la frecuencia nos acordamos de la ecuación de movimiento armónico en un resorte $m\ddot{x} + kx = 0$, donde la frecuencia venía dada por $\omega = \sqrt{k/m}$, en nuestro caso la frecuencia va a ser:

$$\omega = \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}\right)^{1/2} \tag{13}$$

Problema 3

Un átomo de hidrógeno se puede modelar con el protón como una carga puntual en $r = 0$ y el electrón dispersado en una distribución esférica alrededor del protón, por lo que el electrón es equivalente a una densidad de carga por unidad de volumen dada por:

$$\rho(r) = -\frac{q}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

donde $a_0 = 5{,}29 \times 10^{-11} m$ se llama radio de Bohr. Con esto calcule:

a) La cantidad total de la carga del átomo de hidrógeno encerrada dentro de una esfera con radio r centrada en $r = 0$. Demuestre que cuando $r \to \infty$, la carga encerrada tiende a cero.

b) Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) causado por la carga del átomo de hidrógeno como función de r.

Solucion

a) La carga encerrada vendrá dada por:

$$Q_{enc} = q_p + q_e = q + \int \rho(r) dV \tag{14}$$

donde q_p es la carga del protón y q_e es la carga que aporta el electrón. La carga encerrada es:

$$\begin{aligned}
Q_{enc} &= q - \frac{q}{\pi a_0^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} e^{-2r'/a_0} r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\varphi \\
&= q - \frac{q}{\pi a_0^3}\cdot 4\pi \int_0^{r} r'^2 e^{-2r'/a_0} dr' \qquad (\text{con } u = 2r/a_0) \\
&= q - \frac{q}{2}\int_0^{2r/a_0} u^2 e^{-u} du
\end{aligned} \tag{15}$$

Integrando por partes 2 veces la integral se obtiene:

$$\int_0^{2r/a_0} u^2 e^{-u} du = -\frac{4r^2}{a_0^2}e^{-2r/a_0} - \frac{4r}{a_0}e^{-2r/a_0} - 2e^{-2r/a_0} + 2 \tag{16}$$

Si se reemplaza (16) en (15) se encuentra que la carga encerrada es:

$$Q_{enc} = qe^{-2r/a_0}\left[2\frac{r^2}{a_0^2} + 2\frac{r}{a_0} + 1\right] \tag{17}$$

Por último, haciendo $r \to \infty$ se encuentra que $Q_{enc} \to 0$ ya que la exponencial va mas rápido a 0 de lo que el polinomio entre los paréntesis tiende a ∞.

b) Viendo las simetrías del problema notamos que la densidad de carga solo depende del radio, por lo tanto tenemos que el campo eléctrico solo dependerá de r, es decir, $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Si elegimos como superficie Gaussiana una esfera centrada en el origen y de radio r se tiene que por la ley de Gauss:

$$\begin{aligned}
\int \vec{E}\cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\
E(r)r^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\varphi &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\
E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q_{enc}
\end{aligned} \tag{18}$$

Si finalmente reemplazamos Q_{enc} de la ecuación (17) en (18) se encuentra que el campo eléctrico es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}qe^{-2r/a_0}\left[2\frac{r^2}{a_0^2} + 2\frac{r}{a_0} + 1\right]\hat{r} \tag{19}$$

Problema 4

Una región en el espacio contiene una carga total Q que está distribuida en forma esférica en una zona de radio R. La densidad de carga está dada por:

$$\rho(r) = \begin{cases} 3\alpha r/(2R) & \text{para } r \leq R/2 \\ \alpha[1-(r/R)^2] & \text{para } R/2 \leq r \leq R \\ 0 & \text{para } r \geq R \end{cases}$$

a) Calcule α en términos de Q y R.

b) Calcule el campo eléctrico como función de r para las 3 regiones.

Solución

a) Definamos como (I) la zona de $r \leq R/2$, como (II) la de $R/2 \leq r \leq R$ y como (III) la de $r \geq R$. Con esto podemos decir que la carga total encerrada va a ser:

$$Q = Q_I + Q_{II} = \int \rho_I \; dV + \int \rho_{II} \; dV \tag{20}$$

La integral es usando coordenadas esféricas, y dado que las densidades son radiales nos va a salir un 4π de cada una de las integrales por la integración en los ángulos, con lo que queda:

$$Q = 4\pi \int_0^{R/2} \rho_I \; r^2 dr + \int_{R/2}^{R} \rho_{II} \; r^2 dr \tag{21}$$

Entonces para Q_I

$$\begin{aligned} Q_I &= 4\pi \int_0^{R/2} \rho_I \; r^2 dr \\ &= 4\pi \cdot \frac{3\alpha}{2R} \int_0^{R/2} r^3 dr \\ &= \frac{3\alpha\pi R^3}{32} \end{aligned} \tag{22}$$

Ahora para Q_{II}:

$$\begin{aligned} Q_{II} &= 4\pi\alpha \int_{R/2}^{R} \left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right] \; r^2 dr \qquad (\text{usando } u = r/R) \\ &= 4\pi\alpha R^3 \int_{1/2}^{1} u^2 - u^4 du \\ &= \frac{47}{120}\pi\alpha R^3 \end{aligned} \tag{23}$$

Insertando (22) y (23) en (21):

$$Q = \frac{3\alpha\pi R^3}{32} + \frac{47}{120}\pi\alpha R^3 = \frac{233}{480}\pi\alpha R^3 \tag{24}$$

Y por último despejamos α en términos de Q y R:

$$\alpha = \frac{480}{233}\frac{Q}{\pi R^3} \tag{25}$$

b) Dado que las 3 regiones poseen simetría esférica y que la densidad de carga solo depende de r, entonces podemos decir que el campo eléctrico solo depende de r y no de θ ni de ϕ y que tiene la siguiente forma:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r} \tag{26}$$

Aprovechando esto, usamos la ley de Gauss con una esfera de radio r como superficie Gaussiana, lo que:

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} E(r)\hat{r}\cdot r'^2 sin\theta dr' s\theta d\varphi = E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \tag{27}$$

Como tenemos 3 regiones diferentes y la integral del $\vec{E}$ sobre la esfera es siempre la misma, lo que tenemos que hacer es calcular la carga encerrada en cada región.

(I) $r < R/2$
En este caso la carga encerrada por una esfera de radio r es:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \frac{3\alpha r'}{2R}\ r'^2 dr' \\ &= \frac{3\alpha\pi}{2R} r^4 \end{aligned}$$

Si reemplazamos α de (25) y colocamos Q_{enc} en (27):

$$\begin{aligned} E(r)\cdot 4\pi r^2 &= \frac{3\alpha\pi}{2R\epsilon_0} r^4 \\ E(r)\cdot &= \frac{3}{8R\epsilon_0}\frac{480}{233}\frac{Q}{\pi R^3} r^2 \\ E(r) &= \frac{180}{233}\frac{Q}{\pi\epsilon_0}\frac{r^2}{R^4} \end{aligned}$$

y dado que el campo eléctrico es un vector, le agregamos la dirección:

$$\vec{E} = \frac{180}{233}\frac{Q}{\pi\epsilon_0}\frac{r^2}{R^4}\hat{r} \tag{28}$$

(II) $R/2 < r < R$

En este caso la carga encerrada va a ser:

$$Q_{enc} = Q_I + \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R/2}^{r} \left[1 - \frac{r'^2}{R^2}\right] r'^2 sin\theta dr' d\theta d\varphi \tag{29}$$

Donde Q_I es la carga de $r < R/2$ de la ecuación (22). De la integral va a salir un 4π de la integración en $theta$ y φ, y usando la sustitución $u = r'/R$ se tiene que:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= Q_I + 4\pi\alpha R^3 \int_{1/2}^{r/R} u^2 - u^4 \ du \\ &= \frac{3\alpha\pi R^3}{32} + 4\pi\alpha R^3 \left[\frac{1}{3}\frac{r^3}{R^3} - \frac{1}{5}\frac{r^5}{R^5} - \frac{17}{480}\right] \\ &= 4\pi\alpha R^3 \left[\frac{1}{3}\frac{r^3}{R^3} - \frac{1}{5}\frac{r^5}{R^5} - \frac{23}{1920}\right] \qquad \text{reemplazando } \alpha \\ &= 4\pi \cdot \frac{480Q}{233\pi} \left[\frac{1}{3}\frac{r^3}{R^3} - \frac{1}{5}\frac{r^5}{R^5} - \frac{23}{1920}\right] \end{aligned}$$

Colocando Q_{enc} en (27):

$$\begin{aligned} E(r) \cdot 4\pi r^2 &= 4\pi \cdot \frac{1}{\epsilon}\frac{480Q}{233\pi} \left[\frac{1}{3}\frac{r^3}{R^3} - \frac{1}{5}\frac{r^5}{R^5} - \frac{23}{1920}\right] \\ E(r) &= \frac{480Q}{233\epsilon_0\pi r^2} \left[\frac{1}{3}\frac{r^3}{R^3} - \frac{1}{5}\frac{r^5}{R^5} - \frac{23}{1920}\right] \end{aligned}$$

y nuevamente, como el campo eléctrico es un vector le agregamos la dirección:

$$\vec{E}\frac{480Q}{233\epsilon_0\pi r^2} \left[\frac{1}{3}\frac{r^3}{R^3} - \frac{1}{5}\frac{r^5}{R^5} - \frac{23}{1920}\right] \hat{r} \tag{30}$$

(III) $r > R$

En este caso la carga encerrada es la carga total de la esfera, es decir, Q. Por lo tanto el campo eléctrico es el de una carga puntual:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \tag{31}$$

Por último resumimos el campo en las 3 zonas:

$$\vec{E} = \frac{180}{233}\frac{Q}{\pi\epsilon_0}\frac{r^2}{R^4}\hat{r} \qquad \text{para } r < R/2$$
$$\vec{E} = \frac{480}{233}\frac{Q}{\epsilon_0\pi r^2}\left[\frac{1}{3}\frac{r^3}{R^3} - \frac{1}{5}\frac{r^5}{R^5} - \frac{23}{1920}\right]\hat{r} \qquad \text{para } R/2 < r < R$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad \text{para } r > R$$