Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

Ayudantía 18

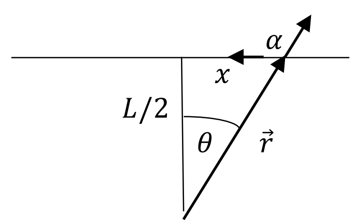
Problema 1. Calcule por integración directa el momento dipolar magnético en función del tiempo de una espira circular de radio R y el de una espira cuadrada de lado L si por ambos circula una corriente $I_{(t)} = I_0 \sin(\omega t)$.

Por definición de momento dipolar magnético tenemos

$$\vec{m} = \frac{I}{2}\oint \vec{r} \times d\vec{l}$$

Para la espira cuadrada, si consideramos el origen en el centro del cuadrado tendremos que la integral sobre un lado del cuadrado es igual a la de los demás lados (por simetría), por lo que la integral total será 4 veces la de un lado

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \cdot 4 \int \vec{r} \times d\vec{l} = 2I \int r\hat{r} \times \hat{l}\, dl$$



Del diagrama tenemos que $\hat{r} \times \hat{l} = \sin(\alpha)\,\hat{k}$, $r = \sqrt{\frac{L^2}{4} + x^2}$ y $dl = dx$

$$\vec{m} = 2I \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sqrt{\frac{L^2}{4} + x^2}\, \sin(\alpha)\, dx\, \hat{k}$$

Ahora hay que ver la dependencia de $\sin(\alpha)$ con x.
Primero vemos del diagrama que $\alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$, por lo que

$$\sin(\alpha) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$$

Pero por relaciones trigonométricas

$$\cos(\theta) = \frac{L/2}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + x^2}}$$

Reemplazando en la integral nos queda

$$\vec{m} = IL \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, \hat{k} = IL^2 \hat{k} = I_0 L^2 \sin(\omega t)\, \hat{k}$$

Para la espira circular es un poco más simple ya que $\hat{r} \times \hat{l} = \hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{k}$, $r = R$ y $dl = R\, d\theta$

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int r\hat{r} \times \hat{l}\, dl = \frac{IR^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta\, \hat{k} = I\pi R^2 \hat{k} = I_0 \sin(\omega t)\, \pi R^2 \hat{k}$$

Problema 2. Considere las espiras del problema 1, pero con corriente constante I_0. Si se le aplica a la espira cuadrada un campo magnético variable en el tiempo que siempre apunta en dirección perpendicular a la normal de la espira dado por $\vec{B} = B_0 e^{-2t} \hat{B}$ ¿Cuál es la velocidad angular a la que tiende el giro de las espiras si la velocidad angular inicial es 0? Si el módulo del campo magnético decayera como $\vec{B} = B_0/(t+1)\, \hat{B}$ ¿Tendríamos una velocidad terminal?

Tenemos que el torque que ejerce un campo magnético sobre una espira con corriente eléctrica es

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = I_0 L^2 B_0 e^{-2t} \hat{n} \times \hat{B} = I_0 B_0 L^2 e^{-2t} \hat{\tau}$$

Pero por definición de torque y momento angular tenemos

$$\tau = \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt}$$

Igualando

$$I \frac{d\omega}{dt} = I_0 B_0 L^2 e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{I_0 B_0 L^2}{I} e^{-2t}$$

Integramos una vez (C constante de integración)

$$\omega = -\frac{I_0 B_0 L^2}{2I} e^{-2t} + C$$

La constante C la obtenemos por condiciones iniciales ($\omega_{(0)} = 0$)

$$\omega_{(0)} = -\frac{I_0 B_0 L^2}{2I} e^0 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{I_0 B_0 L^2}{2I}$$

Por lo que la velocidad angular en función del tiempo

$$\omega_{(t)} = -\frac{I_0 B_0 L^2}{2I} e^{-2t} + \frac{I_0 B_0 L^2}{2I}$$

Para tiempos muy grandes tenemos que a velocidad angular tiende a:

$$\lim_{t\to\infty} \omega_{(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{I_0 B_0 L^2}{2I} e^{-2t} + \frac{I_0 B_0 L^2}{2I} = \frac{I_0 B_0 L^2}{2I}$$

Veamos el caso en que el módulo del campo magnético decae como t^{-1}. Entonces tenemos:

$$I\frac{d\omega}{dt} = \frac{I_0 B_0 L^2}{t+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{I_0 B_0 L^2}{I(t+1)}$$

Integramos

$$\omega = \frac{I_0 B_0 L^2}{2I}\ln(t+1) + C$$

La constante C la obtenemos por condiciones iniciales ($\omega_{(0)} = 0$)

$$\omega_{(0)} = \frac{I_0 B_0 L^2}{2I}\ln(1) + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Por lo que la velocidad angular en función del tiempo

$$\omega_{(t)} = \frac{I_0 B_0 L^2}{2I}\ln(t+1)$$

Para tiempos muy grandes tenemos que a velocidad angular tiende a:

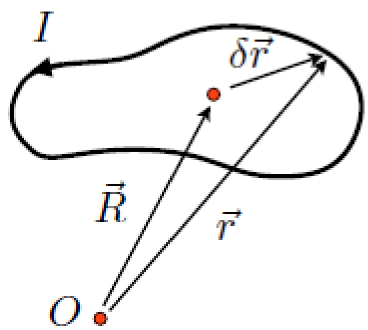
$$\lim_{t\to\infty} \omega_{(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{I_0 B_0 L^2}{2I}\ln(t+1) = \infty$$

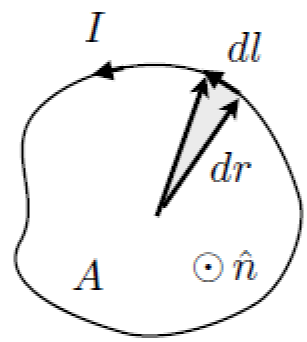
Por lo que en este caso no tendríamos una velocidad angular terminal. La velocidad angular crecería indefinidamente debido a que la intensidad del campo magnético no disminuye lo suficientemente rápido.

Problema 3. Demuestre que el momento dipolar de una espira plana es independiente de su forma, pero depende del área que encierra. Compruebe los resultados del problema 1.

De la definición de momento magnético tenemos

$$\vec{m} = \frac{I}{2}\oint \vec{r} \times d\vec{l}$$





Por el diagrama tenemos que:

$$\vec{m} = \frac{I}{2}\oint \vec{r} \times d\vec{l} = \frac{I}{2}\oint (\vec{R} + \vec{r}') \times d\vec{l} = \frac{I}{2}\left(\vec{R} \times \oint d\vec{l} + \oint \vec{r}' \times d\vec{l}\right)$$

Pero $\oint d\vec{l} = 0$, entonces

$$\vec{m} = \frac{I}{2}\oint \vec{r}' \times d\vec{l}$$

Pero como un diferencial de área se puede escribir como $dA = \frac{r\prime \cdot dl}{2}$. El producto cruz nos da el carácter vectorial $d\vec{A} = \frac{\vec{r}\prime \times d\vec{l}}{2}$

$$\vec{m} = I \int d\vec{A} = IA$$

Problema 4. Se tiene un circuito circular de radio R por el cual fluye una corriente I. El circuito está en presencia magnético $\vec{B} = B_0 x \hat{k}$. Encuentre la fuerza sobre el circuito.

La fuerza que ejerce un campo magnético sobre un alambre con corriente eléctrica es

$$\vec{F} = -I \int \vec{B} \times d\vec{l}$$

Para este caso tenemos que $d\vec{l} = R\, d\theta\, \hat{\theta}$. Reemplazando:

$$\vec{F} = -IB_0 R \int x\hat{k} \times \hat{\theta}\, d\theta$$

Pero como $x = R\cos(\theta)$, entonces obtenemos

$$\vec{F} = -IB_0 R^2 \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\, d\theta\, \hat{r} = \vec{0}$$