Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 - Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Alonso Ruiz (airuiz@uc.cl)

Ayudantía 17

Problema 1

Considere una partícula de masa m y carga q que parte del reposo y se acelera por una diferencia de potencial V. La partícula luego entra en una zona de largo d con campo magnético constante, tal como se ve en la figura 1. Calcule h si es que $d \ll R$, con R el radio del círculo en la zona con campo.

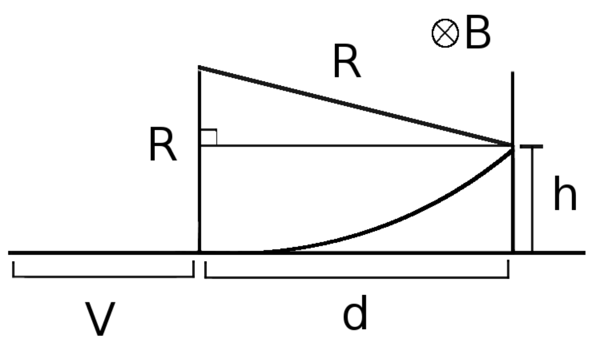


Figura 1:

Solución

De la figura, por el teorema de Pitágoras:

$$(R-h)^2 + d^2 = R^2 \tag{1}$$

Trabajando un poco la ecuación anterior se puede escribir como:

$$h = R - R\sqrt{1-\frac{d^2}{R^2}} \tag{2}$$

Como $d \ll R$, entonces podemos ocupar la aproximación $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, con lo que tenemos que:

$$h \approx R - R\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d^2}{R^2}\right) \quad \Rightarrow \quad h \approx \frac{1}{2}\frac{d^2}{R} \tag{3}$$

Como dentro de la zona con campo la partícula sigue una trayectoria circular, entonces la fuerza de Lorentz debe ser igual a la fuerza centrípeta, por lo tanto el radio del círculo es:

$$m\frac{v^2}{R} = qvB \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{qB} \tag{4}$$

Reemplazando en (3):

$$h \approx \frac{1}{2}\frac{qBd^2}{mv} \tag{5}$$

La velocidad la podemos obtener por conservación de la energía en la zona anterior a la zona con campo magnético, donde se obtiene que:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2qV}{m} \tag{6}$$

Reemplazando v en (5) obtenemos que:

$$h \approx \frac{Bd^2}{2}\sqrt{\frac{q}{2mV}} \tag{7}$$

Nota: La aproximación $d \ll R$ es equivalente a un B débil, ya que en este caso la partícula se deflecta poco, lo que indica una trayectoria casi plana, o equivalentemente que el radio R es grande. Entonces si se toma un d razonable, R va a ser muy grande ya que la trayectoria es casi plana (piense que en el caso límite con $B \to 0$ se tiene $R \to \infty$).

Problema 2

El espectrómetro de masa es un sistema para determinar masa de iones. Este funciona de la siguiente manera: un ion de masa m y carga $+q$ se acelera a través de una diferencia de potencial V, luego la partícula entra en una zona con campo magnético uniforme, donde completa un semicírculo para terminar pegando en una pantalla, como una placa fotográfica por ejemplo (ver figura 2). Considerando esto calcule la masa del ion en términos de V, q, B y x.

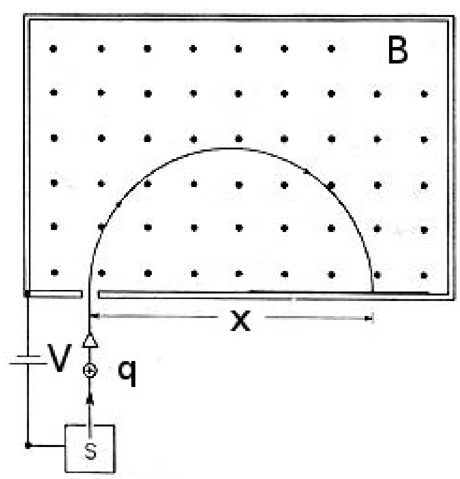


Figura 2:

Solución

Como el ion se mueve en una trayectoria circular en la zona con campo, entonces la fuerza de Lorentz es igual a la fuerza centrípeta. Igualando ambas fuerzas se obtiene (ver (4)):

$$m = \frac{qBR}{v} \tag{8}$$

La velocidad no la conocemos, pero esta se puede obtener a partir de la conservación de la energía antes de entrar al campo, donde se tiene que:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2qV}{m} \tag{9}$$

Si reemplazamos la velocidad en (8):

$$m = qBR\sqrt{\frac{m}{2qV}} \tag{10}$$

Despejando m se obtiene que la masa de la partícula es:

$$m = \frac{qB^2R^2}{2V} \tag{11}$$

Por último de la figura se tiene que $R = x/2$, por lo tanto la masa en términos de V, q, B y x es:

$$m = \frac{qB^2x^2}{8V} \tag{12}$$

Problema 3

Considere el montaje que se ve en la figura 3. En el un ion de masa m y carga $+q$ entra con velocidad v sobre el eje z a una zona con $\vec{B}, \vec{E}$ uniformes y que apuntan en dirección $\hat{x}$. Los campos actúan entre $z = -L/2$ y $z = +L/2$, en todas la otras partes la partícula se mueve libre. Los iones son deflectados en la zona con campos y llegan finalmente a una pantalla en $z = z_0$. Demuestre que en la pantalla se cumple que:

$$x = f(m, q)y^2$$

Con $f(m, q)$ una función de la masa y la carga. (Asuma que $v_y \approx 0$ y $v_z \approx v$ en la zona con campo).

Solución

Para encontrar donde choca la partícula lo único que podemos hacer es resolver la ecuación de movimiento. Por lo tanto se tiene que:

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{13}$$

con $\vec{E} = E\hat{x}$ y $\vec{B} = B\hat{x}$, con esto las ecuaciones de movimiento son:

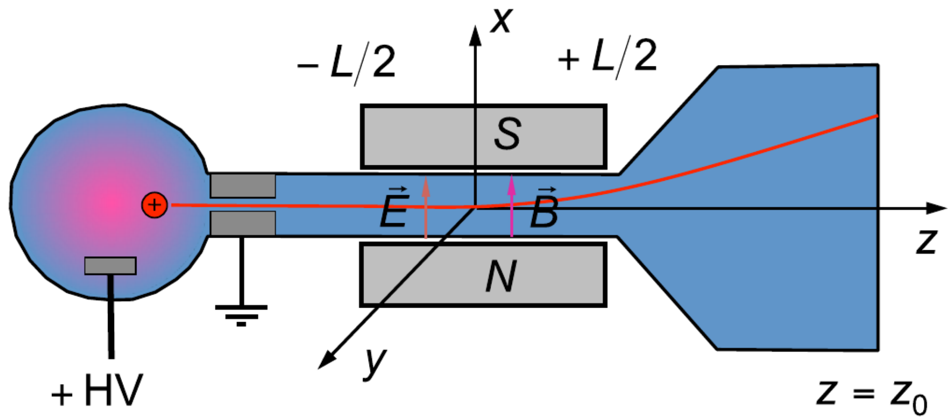


Figura 3:

$$m\ddot{x} = qE \tag{14}$$
$$m\ddot{z} = qBv_z \tag{15}$$
$$m\ddot{z} = -qBv_y \tag{16}$$

La aproximación $v_y \approx 0$ nos dice que $\ddot{z} \approx 0$, lo que indica que $v_z \approx cte$, es decir la aproximación $v_z \approx v$, por lo que de ahora en adelante no nos importa el movimento en z. Con esto en mente podemos hacer lo siguiente usando la regla de la cadena:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz}\frac{dz}{dt} \approx v\frac{dx}{dz} \tag{17}$$

Derivando nuevamente con respecto a t:

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dz}\frac{dz}{dt}\left(v\frac{dx}{dz}\right) \approx v^2\frac{d^2x}{dz^2} \tag{18}$$

Análogamente para $\ddot{y}$ se obtiene que:

$$\ddot{y} \approx v^2\frac{d^2y}{dz^2} \tag{19}$$

Con esto las ecuaciones de movimiento quedan como:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{qE}{mv^2} \qquad y \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{qB}{mv} \tag{20}$$

Dado que la "aceleración" es constante, entonces las ecuaciones para $x(z)$ e $y(z)$ (notar que ahora dependen de z, no de t) son:

$$x(z) = x_0 + v_x z + \frac{1}{2}\frac{qE}{mv^2}z^2 \tag{21}$$
$$y(z) = y_0 + v_y z + \frac{1}{2}\frac{qB}{mv}z^2 \tag{22}$$

Para determinar x_0, y_0, v_x, v_y necesitamos condiciones iniciales. Estas condiciones se pueden obtener del único lugar donde conocemos x e y, es decir, en $z = -L/2$. Con esto las condiciones iniciales para $x(z)$ son:

1. $x(-L/2) = 0$. Porque inicialmente la partícula solo se mueve por el eje z.
2. $x'(-L/2) = 0$. (La prima indica derivada con respecto a z). Porque inicialmente la partícula solo se mueve en el eje z. Si en $t = t_0$ la partícula esta en $z = -L/2$, esta condición se puede obtener de la regla de la cadena

$$\left.\frac{dx}{dz}\right|_{-L/2} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} \quad \left.\frac{dt}{dz}\right|_{t=t_0} = 0 \qquad \text{Ya que } v_x(t = t_0) = 0$$

De manera análoga, las condiciones iniciales para $y(z)$ son:

i) $y(-L/2) = 0$. Porque inicialmente la partícula solo se mueve por el eje z.

ii) $y'(-L/2) = 0$. (La primera indica derivada con respecto a z). Porque inicialmente la partícula solo se mueve en el eje z. Análogo a las condiciones en x.

Aplicando ambos conjuntos de condiciones iniciales se obtiene que la posición de la partícula en la zona con campo es:

$$x(z) = \frac{qE}{2mv^2}\left(z + \frac{L}{2}\right)^2 \tag{23}$$
$$y(z) = \frac{qB}{2mv}\left(z + \frac{L}{2}\right)^2 \tag{24}$$

Ahora nos pasamos a la zona sin campos, es decir, a la zona con $z \geq L/2$. En esta zona no hay fuerzas que actúen sobre la partícula, por lo que se mueve en línea recta. Con x, y parametrizados con z se tiene que:

$$\tilde{x}(z) = \tilde{x}_0 + \tilde{v}_x z \tag{25}$$
$$\tilde{y}(z) = \tilde{y}_0 + \tilde{v}_y z \tag{26}$$

Donde el $\tilde{}$ indica que estamos en la zona con $z \geq L/2$. Con respecto $\tilde{v}_x$ y $\tilde{v}_y$, estos tienen que ser iguales a las derivadas de $x(z)$ e $y(z)$ evaluadas en $z = L/2$ para que la curva tenga la misma pendiente en ambas zonas, es decir, se necesita que $x'(L/2) = \tilde{x}'(L/2)$ y $y'(L/2) = \tilde{y}'(L/2)$, con la prima denotando derivada con respecto a z. Con esto queda que:

$$\tilde{x}(z) = \tilde{x}_0 + \frac{qEL}{mv^2}z \tag{27}$$
$$\tilde{y}(z) = \tilde{y}_0 + \frac{qBL}{mv}z \tag{28}$$

Para encontrar $\tilde{x}_0$ e $\tilde{y}_0$ debemos exigir que $\tilde{x}(L/2) = x(L/2)$ y $\tilde{y}(L/2) = y(L/2)$ para que la curva sea continua. Con estas condiciones se obtiene que $\tilde{x}_0 = \tilde{y}_0 = 0$, por lo que se tiene:

$$\tilde{x}(z) = \frac{qEL}{mv^2}z \tag{29}$$
$$\tilde{y}(z) = \frac{qBL}{mv}z \tag{30}$$

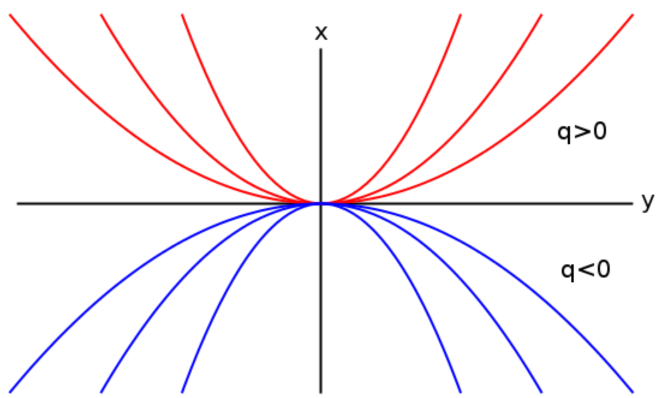
Para encontrar las curvas en un plano que pase por z tenemos que mezclar ambas ecuaciones, para ello despejamos v de (29) y reemplazamos en (30), donde se obtiene que:

$$\tilde{x} = \frac{m}{q}\frac{E}{B^2Lz}\tilde{y}^2 \quad \underbrace{\longrightarrow}_{z=z_0} \quad \tilde{x} = \frac{m}{q}\frac{E}{B^2Lz_0}\tilde{y}^2 \tag{31}$$

Por lo tanto demostramos lo pedido, donde además se tiene que $f(m,q)$ es:

$$f(m,q) = \frac{m}{q}\frac{E}{B^2Lz_0} \tag{32}$$

Entonces lo que se tiene en el plano en $z = z_0$ (la pantalla) son parábolas, tal como se ve en la figura. Las parábolas abren hacia arriba si la carga es positiva y hacia abajo si la carga en negativa.



Nota: La aproximación utilizada tiene sentido, ya que $\vec{E}$ deflecta la partícula hacia arriba, por lo que no afecta a v_y ni v_z, mientras que $\vec{B}$ la deflecta hacia afuera de la hoja, pero si el campo es mas o menos débil entonces la deflección es pequeña, por lo que se tiene que la partícula no se mueve mucho en y, lo que indica que $v_y \approx 0$. Esto indica también que $v_z \approx v$ ya que como $\vec{B}$ no modifica v_x

ni v_y, considerando ademas que $\vec{B}$ no modifica el módulo de la velocidad, entonces la única opción que queda es que $v_z \approx v$.

Nota histórica: Este es el experimento que realizó J.J. Thompson (el mismo del modelo atómico del budín de pasas) en 1897 para determinar la relación carga/masa del electrón, haciendo uso de los rayos catódicos.