Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 - Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Alonso Ruiz (airuiz@uc.cl)

Ayudantía 16

Problema 1

Una partícula de carga q y masa m entra en un angulo θ a una zona de campo magnético uniforme. La partícula sale en un ángulo ϕ, tal como se ve en la figura 1. Calcule el angulo ϕ y la velocidad v de la partícula si se conocen la distancia d, el ángulo θ y el campo magnético B.

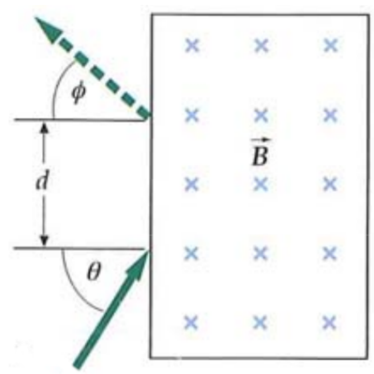


Figura 1:

Solución

El ángulo ϕ debe ser igual al ángulo θ. Esto se debe a que en una zona con campo magnético uniforme la partícula se mueve en un círculo, tal como se ve en la figura 2. El movimiento es simétrico, por lo tanto se debe tener que $\theta = \phi$. Notar que la partícula se mueve en un arco de círculo, tal que la cuerda que une los puntos por donde entra y sale la partícula tiene largo d. Esta cuerda es perpendicular al radio del círculo, de ahí que el movimiento sea simétrico.

Para encontrar la velocidad v, si vemos la figura 2 tenemos que:

$$\frac{d}{2} = R\cos\theta \tag{1}$$

Para determinar el radio del círculo, usamos que la fuerza de Lorentz debe ser igual a la aceleración centrípeta, por lo tanto:

$$F_L = F_c \quad \Rightarrow \quad qvB = m\frac{v^2}{R} \tag{2}$$

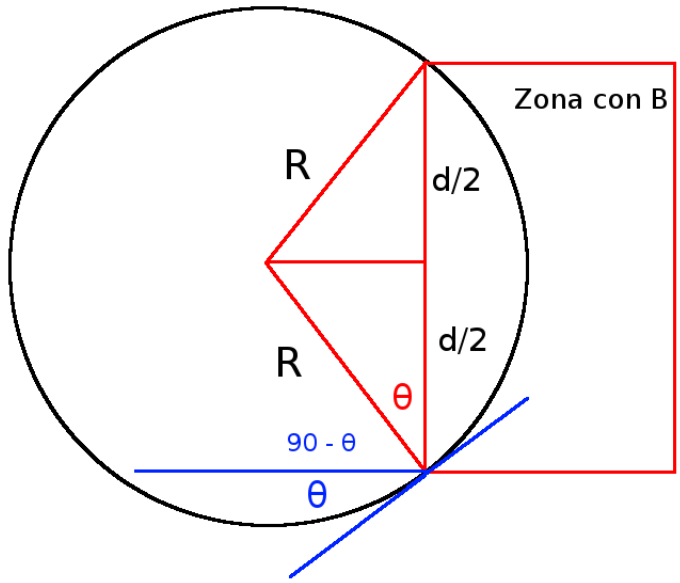


Figura 2:

donde obtenemos que el radio del círculo es:

$$R = \frac{mv}{qB} \tag{3}$$

Si reemplazamos el radio en (1), entonces la velocidad de la partícula va a ser:

$$v = \frac{qBd}{2m\cos\theta} \tag{4}$$

Problema 2

Una partícula de carga q y masa m parte del reposo en el origen de coordenadas en una región donde existe un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ paralelo al eje x, y un campo magnético uniforme $\vec{B}$ paralelo al eje z. Encuentre la posición de la partícula en función del tiempo.

Solución

Para encontrar la posición de la partícula debemos aplicar Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, donde la fuerza que actúa sobre la partícula va a ser la fuerza de Lorentz, por lo tanto se tiene que:

$$m\dot{\vec{v}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{5}$$

El campo eléctrico es simplemente $\vec{E} = E\hat{x}$ y el campo magnético es $\vec{B} = B\vec{z}$, con E, B constantes. Si realizamos el producto cruz entre $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ y $\vec{B}$, entonces las ecuaciones de movimiento son:

$$m\dot{v}_x = qE + qv_yB \tag{6}$$
$$m\dot{v}_y = -qv_x \tag{7}$$
$$m\dot{v}_z = 0 \tag{8}$$

De (8) se obtiene fácilmente que $z(t) = z_0 + v_{0z}t$, pero como la partícula esta inicialmente en reposo en el origen, entonces $z_0 = v_{0z} = 0$, por lo tanto:

$$z(t) = 0 \tag{9}$$

Para resolver las ecuaciones (6) y (7), derivamos (6) y despejamos $\dot{v}_y$, con lo que se tiene:

$$\dot{v}_y = \frac{m}{qB}\ddot{v}_x \tag{10}$$

Si reemplazamos la ecuación anterior en (7) obtenemos:

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x \qquad \text{con} \qquad \omega^2 = \frac{q^2B^2}{m} \tag{11}$$

Esta es la ecuación para un oscilador armónico, cuya solución va a ser:

$$v_x = H\cos{(\omega t)} + G\sin{(\omega t)} \tag{12}$$

Con H, G constantes que debemos determinar con las condiciones iniciales. Las condiciones iniciales para v_x van a ser:

1. $v_x(t = 0) = 0$. Porque la partícula esta inicialmente en reposo.
2. $\dot{v}_x(t = 0) = (qE)/m$. Se obtiene de (6) ya que inicialmente $v_y = 0$ porque la partícula esta en reposo.

Aplicando ambas condiciones se encuentra que:

$$v_x = \frac{E}{B}\sin{(\omega t)} \tag{13}$$

Como ya conocemos v_x, podemos despejar v_y de (6) y derivar v_x, por lo tanto se obtiene que v_y es:

$$v_y = \frac{E}{B}(\cos{(\omega t)} - 1) \tag{14}$$

Para encontrar $x(t)$ e $y(t)$ debemos integrar las velocidades (13) y (14), por lo tanto:

$$x(t) = \int v_x dt = -\frac{E}{B\omega}\cos{(\omega t)} + x_0 \tag{15}$$
$$y(t) = \int v_y dt = \frac{E}{B\omega}(\sin{(\omega t)} - \omega t) + y_0 \tag{16}$$

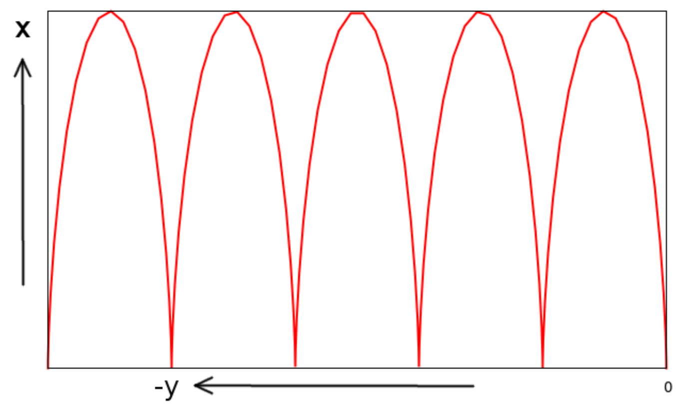
Las constantes de integración x_0, y_0 se obtienen de las condiciones iniciales, por lo tanto dado que la partícula esta inicialmente en reposo, entonces $x(0) = y(0) = 0$. Finalmente la posición de la partícula va a ser:

$$x(t) = \frac{E}{B\omega}(1 - \cos(\omega t)) \tag{17}$$

$$y(t) = \frac{E}{B\omega}(\sin(\omega t) - \omega t) \tag{18}$$

$$z(t) = 0 \tag{19}$$

La trayectoria que sigue la partícula es una cicloide que parte en $x = y = 0$ y que luego se mueve en dirección $-y$ y que oscila entre 0 y $2E/(B\omega)$ en el eje x. tal como se ve en la siguiente figura:



Problema 3

Considere que una partícula de carga q y masa m se mueve sobre el eje x a una velocidad v. En $x = 0$ la partícula entra a una zona de campo magnético uniforme $\vec{B}$ que entra al plano, tal como se ve en la figura 3. La partícula deja la zona con campo a una distancia d para luego pegar en una pantalla que se encuentra a una distancia d_1. Calcule la altura a la que la partícula pega en la pantalla.

Solución

El problema se divide en 2 zonas, la zona-I en la cual hay campo magnético y zona-II donde no hay campo magnético. En la zona-II el movimiento de la partícula va a ser una recta ya que no actúan fuerzas sobre ella, luego se tiene que la posición va a ser:

$$x_2(t) = \tilde{x}_0 + \tilde{v}_x(t - T) \tag{20}$$

$$y_2(t) = \tilde{y}_0 + \tilde{v}_y(t - T) \tag{21}$$

donde T es el tiempo en que la partícula deja la zona con campo, $\tilde{x}_0$ e $\tilde{y}_0$ son la posición inicial en x e y respectivamente, y por último $\tilde{v}_x, \tilde{v}_y$ son las velocidades iniciales en x e y respectivamente.

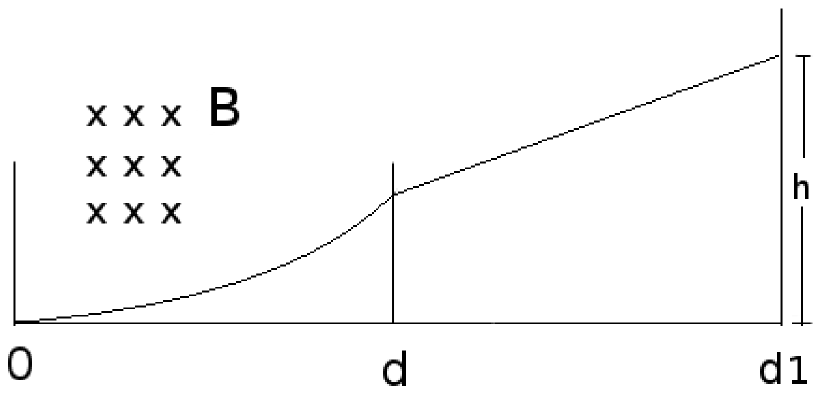


Figura 3:

Supongamos que en T_2 la partícula pega en la pantalla, entonces se va a tener que:

$$d_1 = x_2(T_2) = \tilde{x}_0 + \tilde{v}_x(T_2 - T) \tag{22}$$

$$h = y_2(T_2) = \tilde{y}_0 + \tilde{v}_y(T_2 - T) \tag{23}$$

Se puede despejar $(T_2 - T)$ de (22) y reemplazar en (23), donde se encuentra que:

$$h = \tilde{y}_0 + \frac{\tilde{v}_y}{\tilde{v}_x}(d - \tilde{x}_0) \tag{24}$$

Para encontrar $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{v}_x, \tilde{v}_y$ hay que resolver Newton en la Zona-I, donde por continuidad del moviemiento se debe tener que la posición y velocidad final en la zona-I debe ser igual a la posición y velocidad inicial en la zona-II.

Para encontrar la posición de la partícula en la zona-I, nos damos cuenta que sobre esta solo actúa la fuerza debida al campo magnético, por lo tanto se tiene que:

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{25}$$

En este caso el eje x va hacia la derecha, el eje y hacia arriba y el eje z sale de la hoja, considerando esto el campo magnético es $\vec{B} = -B\hat{z}$. Con esto las ecuaciones de movimiento son:

$$m\dot{v}_x = -qv_yB \tag{26}$$

$$m\dot{v}_y = qv_x \tag{27}$$

$$m\dot{v}_z = 0 \tag{28}$$

Claramente $z(t) = 0$. Las ecuaciones (26) y (27) se resuelven de forma análoga al problema 2, se deriva (26), luego se despeja $\dot{v}_y$ y se reemplaza en (27). Esto da que la ecuación para $\dot{v}_x$ es:

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x \qquad \text{con} \qquad \omega^2 = \frac{qB}{m} \tag{29}$$

Que es la ecuación de un oscilador armónico, cuya solución al igual que en el problema 2 es:

$$v_x = H\cos(\omega t) + G\sin(\omega t) \tag{30}$$

Las condiciones iniciales en este caso van a ser:

1. $v_x(t = 0) = v$. Porque la partícula se venía moviendo con velocidad v en el eje x.

2. $\dot{v}_x(t = 0) = 0$. Porque inicialmente la partícula no se mueve en y. Sale de (26).

Si se aplican las condiciones iniciales se encuentra v_x. Una vez que se conoce v_x se despeja v_y de (26), con lo que se obtiene:

$$v_x = v\cos(\omega t) \tag{31}$$

$$v_y = v\sin(\omega t) \tag{32}$$

Para encontrar las posiciones se integran v_x y v_y con las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0$, lo que da:

$$x_1(t) = \frac{v}{\omega}\sin(\omega t) \tag{33}$$

$$y_1(t) = \frac{v}{\omega}(1 - \cos(\omega t)) \tag{34}$$

Ahora si podemos determinar $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{v}_x, \tilde{v}_y$. Es claro que $\tilde{x}_0 = d$, ya que ahí se termina la zona con campo magnético. Ahora $\tilde{y}_0$ se puede determinar como:

$$\tilde{y}_0 = y_1(T) = \frac{v}{\omega}(1 - \cos(\omega T)) \tag{35}$$

Para encontrar $\cos(\omega T)$ usamos que:

$$d = x_1(T) = \frac{v}{\omega}\sin(\omega T) \quad \to \quad \sin(\omega T) = \frac{d\omega}{v} \tag{36}$$

Si usamos la relación trigonométrica $\cos^2(\omega T) + \sin^2(\omega T) = 1$ encontramos:

$$\tilde{y}_0 = \frac{v}{\omega}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2\omega^2}{v^2}}\right) \tag{37}$$

Análogamente para $\tilde{v}_x$ y $\tilde{v}_y$:

$$\tilde{v}_x = v_x(T) = vcos(\omega T) = \sqrt{v^2 - d^2\omega^2} \tag{38}$$

$$\tilde{v}_y = v_y(T) = v\sin(\omega T) = d\omega \tag{39}$$

Donde se uso (36) y que $\cos^2(\omega T) + \sin^2(\omega T) = 1$. Ahora que por fin conocemos todas las constantes, la altura h a la que llega la partícula usando (24) es:

$$h = \frac{v}{\omega}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2\omega^2}{v^2}}\right) + \frac{d\omega(d_1 - d)}{\sqrt{v^2 - d^2\omega^2}} \tag{40}$$