Pontificia Universidad Católica de Chile - Facultad de Física
QM II - FISZ0412

Guía 5 de Ejercicios

Profesor: Max Bañados

Ayudante : Nicolás Pérez (nrperez@uc.cl)
Facultad de Física UC

Teoría de Perturbaciones Dependientes del tiempo

1. Una partícula está en el ground state del hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V$$

donde:

$$V = 0 \qquad x < -a, \quad x > a \tag{1}$$
$$V = -V_0 \qquad -a < x < a \tag{2}$$

Encuentre la probabilidad de transición por unidad de tiempo al estado de energía $E_k > 0$, debido a la perturbación:

$$H'(t) = ve^{-x^2/\alpha^2} sin(\omega t) \tag{3}$$

donde v es una constante y $\alpha \ll a$.

2. El deuterón es una *s-wave* ($l = 0$) *bound state* de un protón y un neutrón con una energía ligada (*binding energý*) de $2.226MeV$. Es una buena aproximación como estado ligado en un pozo potencial de profundidad $V_0 = 35.2MeV$ y un ancho $a = 2.02 \times 10^{-13} cm$. Usando estos datos, calcule la probabilidad para una foto-desintegración del deuterón. Asúma que el fotón incidente puede ser aproximado como una perturbación:

$$V = e\vec{A} \cdot \vec{r} sin(\omega t) \qquad t > 0 \tag{4}$$
$$V = 0 \qquad t < 0 \tag{5}$$

donde $\vec{A}$ es un vector constante de magnitud $1 \times 10^3 V/cm$. Use cualquier otra aproximación que parezca razonable.

3. Un átomo está inicialmente en el ground-state de un oscilador armónico simple:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a \tag{6}$$

En $t = 0$ una perturbación es encendida:

$$V' = \hbar\Omega(a^\dagger + a) \tag{7}$$

Encuentre la probabilidad de transición a cuálquier estado excitado del sistema para $t > 0$. ¿ Cuál es la probabilidad de que un átomo permaneza en su ground-state for $t > 0$?

4. Considere el Hamiltoniano

$$H(R(t)) = -\frac{\mu}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{R}(t) \tag{8}$$

donde

$$\vec{B}(t) = B_0[sin\theta cos(\omega t)\hat{e}_x + sin\theta sin(\omega t)\hat{e}_y + cos\theta \hat{e}_z] \tag{9}$$

de modo que:

$$\vec{B}(t + 2\pi/\omega) = \vec{B}(t) \tag{10}$$

Muestre que si $\omega \ll \mu B_0$ entonces:

$$\langle \Psi(t = 2\pi/\omega)|\Psi(t = 0)\rangle = exp\left(i\frac{2\pi}{\omega}\mu B_0\right) exp[-i\pi(1 - cos\theta)] \tag{11}$$

Hint: $\frac{2\pi}{\omega}\mu B_0$ es la fase dinámica $-\int_0^{2\pi/\omega} E(t)dt$ y:

$$-\pi(1 - cos\theta) = -\Delta\Omega/2 \tag{12}$$

es la fase geométrica (fase de Berry).

5. **Hidrógeno en Capacitor**

Un átomo de hidrógeno en su ground-state es ubica entre las placas paralelas de un capacitor. Para tiempos $t < 0$, ningún voltaje es aplicado. Comenzando en $t = 0$, un campo eléctrico ($\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-t/\tau}$) es aplicado, donde τ es una constante. Encuentre la fórmula para la probabilidad de que el electrón termine en un estado j debido a esta perturbación. Evalúe el resultado para j:

   (a) Un estado $2s$
   (b) Un estado $2p$

6. Considete un oscilador armónico simple cuya frecuencia angular clásica es ω_0. Para $t < 0$ se sabe que está en el ground-state. Para $t > 0$ también hay un potencial dependiente del tiempo:

$$V(t) = F_0 x cos\omega t \tag{13}$$

donde F_0 es constante en espacio y tiempo. Obtenga una expresión para el valor de expectación $\langle x\rangle$ como una función del tiempo usando teoría de perturbaciones dependiente del tiempo al orden más bajo distinto de cero. ¿ Es este procedimiento valido para $\omega \approx \omega_0$

[Usted puede usar: $\langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\hbar/2m\omega_0}(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1})$]

7. El Hamiltoniano sin perturba de un sistema de dos estados está representado por:

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1^0 & 0 \\ 0 & E_2^0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Hay, además, una perturbación dependiente del tiempo:

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda cos\omega t \\ \lambda cos\omega t & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Note que λ es real.

(a) En $t = 0$ el sistema es sabido que se encuentra en el primer estado, representado por:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Usando teoría de perturbaciones dependiente del tiempo y asumiendo que $E_1^0 - E_2^0$ no es cercano a $\pm\hbar\omega$, derive una expresión para la probabilidad de que el sistema sea encontrado en el segundo estado representado por:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

como una función de $t(t > 0)$

(b) ¿Por qué este procedimiento no es válido cuando $E_1^0 - E_2^0$ es cercano a $\pm\hbar\omega$?

8. Considere un oscilador armónico descrito por:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)x^2 \tag{18}$$

donde $\omega(t) = \omega_0 + cos(at)\delta\omega$ y $\delta\omega \ll \omega_0$ (a es una dcconstante). Asuma que en $t = 0$ el sistema está en el ground-state. Usando teoría de perturbaciones, encuentre la probabilidad de transición desde el ground state al estado final f. Usted puede usar el resultado $\langle n|x^2|0\rangle = m\hbar\omega/\sqrt{2}$ para $n = 2$ y cero de otra manera.