Pontificia Universidad Católica de Chile - Facultad de Física
QM II - FIS1533

Guía 4 de Ejercicios

Profesor: Max Bañados

Ayudante : Nicolás Pérez (nrperez@uc.cl)
Facultad de Física UC

Teoría de Perturbaciones Degenerada

1. Considere una partícula de masa m que es libre de moverse en una región unidimensional de largo L que se cierra sobre si misma en una línea circular de largo L.

   - Muestre que los estados estacionarios pueden ser escritos en la forma:

   $$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n x/L} \qquad (-L/2 < x < L/2) \tag{1}$$

   donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ y las energías permitidas son:

   $$E_n = \frac{2}{m}\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2 \tag{2}$$

   Nótese que con excepción del ground state ($n = 0$), todos son doblemente degenerados.

   - Ahora, suponga que introducimos la perturbación:

   $$H' = -V_0 e^{-x^2/a^2} \tag{3}$$

   donde $a \ll L$. Encuentre la corrección a primer orden a E_n. Hint: Para evaluar las integrales,

   explote el hecho de que $a \ll L$ para extender los límites desde $\pm L/2$ a $\pm\infty$. Después de todo, H' es esencialmente cero fuera de $-a < x < a$.

   - Cuáles son las "buenas" combinaciones lineales de ψ_n y ψ_{-n} para este problema? Muestre que con estos estados, obtiene la corrección a primer orden usando la ecuación:

   $$E_n^{(1)} = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^{(0)} \rangle \tag{4}$$

2. La matriz hamiltoniana para un sistema de dos estados puede ser escrita como:

   $$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E_1^0 & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & E_2^0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

   Claramente las autofunciones de energía para el problema sin perturbar ($\lambda = 0$) están dadas por:

   $$\phi_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

- Resuelva este problema exactamente para encontrar las autofunciones de energía ψ_1 y ψ_2 y los autovalores de energía E_1 y E_2.
- Asumiendo que $\lambda|\Delta| \ll |E_1^0 - E_2^0|$, resuelva el mismo problema usando teoría de perturbaciones independiente del tiempo hasta primer orden en las autofuncioens de energía y hasta segundo orden en los autovalores de energía. Compare con los resultados obtenidos en (a).
- Suponga que las dos energías sin perturbar son "casi degeneradas", esto es:

$$|E_1^0 - E_2^0| \ll \lambda|\Delta| \tag{7}$$

  Muestre que los resultados exactos obtenidos en (a) arman de forma cercana lo que usted esperaría obtener aplicando teoría de perturbaciones degenerada a este problem con E_1^0 puesto igual a E_2^0.

3. Una partícula de masa m se mueve en una dimension en el potencial peródico:

$$V(x) = V_0 cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) \tag{8}$$

Sabemos que los autoestados de energía pueden ser divididos en clases caracterizadas por un ángulo θ con funciones de onda $\phi(x)$ que obedece: $\phi(x+a) = e^{i\theta}\phi(x)$ para todo x. Para la clase $\theta = \pi$, esto se vuelve: $\phi(x+a) = -\phi(x)$ (antiperiódico sobre un largo a).

- Incluso cuando $V_0 = 0$, todavía podemos clasificar los autoestados por θ. Para qué valores de k la función de onda $\phi(x) = e^{ikx}$ satisface la condición antiperiódica sobre el largo a? Cuál es el espectro de energía para la clase $\theta = \pi$ para $V_0 = 0$?
- Cuando V_0 es pequeño (es decir, cuando $V_0 \ll \hbar^2/ma^2$), calcule las dos autoenergías más bajas por teoría de perturbaciones a primer orden.

4. Una partícula está en una caja de 2 dimensiones de lados a. Si la perturbación:

$$V' = \lambda xy$$

es aplicada, encuentre el cambio en la energía del ground state y el primer estado excitado a primer orden (no trivial).

5. Un sistema con momento de inercia I tiene un hamiltoniano:

$$H_0 = \frac{L^2}{2I} \tag{9}$$

- ¿Cuales son las energías del estado más bajo y del primer estado excitado?
- Una perturbación:

$$H' = g\frac{eB}{mc}L_x \tag{10}$$

  es aplicada. Encuentre el *splitting* de los primeros estados excitados.

6. Considere un sistema cuántico con solo tres estados independientes linealmente. El Hamiltoniano, en forma matricial es:

$$H = V_0 \begin{pmatrix} (1-\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

donde V_0 es una constante y ϵ es un número pequeño ($\epsilon \ll 1$)

7. Considere una molecula planar consistente en 4 átomos: un atomo es de tipo A y los otros tres átomos son de tipo B. Un electrón en la molécula puede ser encontrado en una vecindad de cada átomo. Si el electrón es cercano al átomo A, tiene energía $E_1^{(0)}$: si está cerca a cualquiera de los átomos B, tiene energía $E_2^{(0)}$, donde $E_1^{(0)} < E_2^{(0)}$. Denotamos los estados por:

$$|1\rangle = (1000) \tag{12}$$
$$|2\rangle = (0100) \tag{13}$$
$$|3\rangle = (0010) \tag{14}$$
$$|4\rangle = (0001) \tag{15}$$

- Para la primera aproximación, el electrón no se puede mover de un átomo a otro. Usando la bases $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$, escriba el Hamiltoniano H_0 para esta aproximación.
- Para el caso en el que un electrón se puede mover desde el átomo B al átomo A y viceversa, pero no puede moverse de un átomo B a otro, denotamos por a la energía asociada a la transición desde un átomo A a un átomo B, donde $a \ll E_1$. Escriba la perturbación en este caso.
- Usando teoría de perturbaciones, calcule la corrección a segundo orden a la energía del estado $|1\rangle$ y la corrección a primer orden de los estados $|2\rangle, |3\rangle, |4\rangle$.
- Calcule exactamente las correcciones a las energías de los estados. Muestre que cuando $a \ll E_1$ uno obtiene el resultado de la parte (c)