Pontificia Universidad Católica de Chile - Facultad de Física
QM II - FIS1533

Guía 3 de Ejercicios

Profesor: Max Bañados

Ayudante : Nicolás Pérez (nrperez@uc.cl)
Facultad de Física UC

Teoría de Perturbaciones independiente del tiempo

1. Un oscilador armónico simple de una dimensión es sujeto a una pequeña perturbación al potencia $\delta V(x)$, produciendo un "agujero" en el centro del movimiento. Entonces:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{\lambda}{x^2 + a^2} = \frac{P^2}{2m} + V + \delta V$$

   Calcule la corrección a la energía del ground state del oscilador al primer orden en λ en el evento que:

   (a) $a << \sqrt{\hbar/m\omega}$
   (b) $a >> \sqrt{\hbar/m\omega}$

2. Considere el Hamiltoniano

$$H = H_0 + \lambda H'$$

   donde:

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \qquad H' = \begin{pmatrix} 0 & ia \\ -ia & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Resuelva los autoestados y autofunciones exacta
   (b) Resuelva ambos autovalores y autofunciones a segundo orden usando teoría de perturbaciones

3. Una partícula de masa m se mueve en un potencial:

$$V = \frac{1}{2}k|x|^{2+\epsilon} \qquad |\epsilon| < 1$$

   Estime la energía del ground state. Hint:

$$\frac{1}{2}k|x|^{2+\epsilon} = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k(x^2 - |x|^{2+\epsilon}) \approx \frac{1}{2}kx^2 + \frac{\epsilon}{2}kx^2 ln|x|$$

   También:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^2 lnx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-3/2}\left[1 - \frac{1}{2}(c + ln4a)\right]$$

   donde

$$c = 0.577216... = Constante\ de\ Euler$$

4. Considere un oscilador armónico isotrópico en dos dimensiones. El hamiltoniano está dado por:

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

   - ¿Cuáles son las energías de los 3 menores estados? Existe alguna degeneración?
   - Ahora aplicamos la perturbación
   $$V = \delta m\omega^2 xy$$
   donde δ es un número real sin dimension mucho menor que la unidad. Encuentre el eigenket a orden cero y la correspondiente energ
   ia a primer orden (esto es, la energía sin perturbar obtenida antes más el shift de energía a primer orden) para cada uno de los tres menores estados (*three lowest-lying states*).
   - Resuelva $H_0 + V$ exactamente. Compare con los resultados perturbativos obtenidos en (b) [Usted podría usar $\langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\hbar/2m\omega}(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1})$]

5. Para una partícula de masa m moviéndose en el potencial:

$$V = \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{2}{2}k_1 x^2 + \lambda xy \qquad |k_1 - k_2| > 2\lambda \tag{1}$$

   (a) Encuentre los niveles de energía exactos

   (b) Use teoría de perturbaciones para encontrar a orden λ^2 la energía de todos los niveles y compare con la solución exacta a este orden.

6. **Interacción de Spin**

   Considere una partícula de spin 1/2 que está ligada a un oscilador armónico tridimensional con frecuencia ω. El ground state del Hamiltoniano H_0 y la interacción de spin son:

$$H = H_0 + H' \tag{2}$$

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \tag{3}$$

$$H' = \lambda \vec{r}\cdot\vec{\sigma} \tag{4}$$

   donde λ es una constante y $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ son las matrices de Pauli. Omita la interacción spin-órbita. Use teoría de perturbaciones para calcular el cambio en la energía del groundstate a orden $\mathcal{O}(\lambda^2)$

7. **Teorema del Virial**

   Sea

$$\widehat{H} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\vec{p}_i^2}{2M_i} + V_i(\vec{r}_i)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} W_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{5}$$

   El hamiltoniano de un sistema de N partículas, y $\psi_g s(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N)$ el estado fundamental asociado. Considere la siguiente familia de funciones:

$$\{\psi(\lambda) = \psi_{gs}(\lambda\vec{r}_1, \lambda\vec{r}_2, ...\lambda\vec{r}_N)\big|\lambda\epsilon R\} \tag{6}$$

Evalúe $\langle \widehat{H} \rangle_\lambda$ y minimice respecto a λ. Pruebe que se cumple el siguiente resultado <u>exacto</u>:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^2}{2M_i} \right\rangle = E_{kin} = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^{N} \tilde{V}_i(\vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \tilde{W}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right\rangle \tag{7}$$

Con:

$$\tilde{V}_i(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \nabla V_i(\vec{x}) \tag{8}$$

$$\tilde{W}_{ij}(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \nabla W_{ij}(\vec{x}) \tag{9}$$

8. **Electrones interactuantes**

   Considere dos electrones unidos a un protón por interacción de Coulomb. Desprecie la repulsión coulombiana entre los dos electrones.

   - ¿Cuáles son la energía de ground state y la función de onda para este sistema?
   - Considere un potencial débil que existe entre los dos electrones de la forma:

     $$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V_0 \delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \tag{10}$$

     donde V_0 es una constante y $\vec{s}_j$ es el operador spin para el electrón j (desprecie la interacción spin órbita). Use teoría de perturbaciones para estimar como este potencial altera la energía del ground state.