PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE FÍSICA

FIZ 0412 Mecánica Cuántica
Profesor: Max Bañados
Ayudantes: Ariel Norambuena ***ainoramb@uc.cl***

Guía 2: Adición de Momentum Angular

7 DE ABRIL DE 2013

Medición de probabilidades en sistemas de dos partículas de spin 1/2

Considere un sistema formado por dos electrones, de modo que la función de onda de spin del sistema puede escribirse de manera general como

$$| \psi\rangle = \alpha\, |\uparrow_1\rangle\, |\uparrow_2\rangle + \beta\, |\uparrow_1\rangle\, |\downarrow_2\rangle + \gamma\, |\downarrow_1\rangle\, |\uparrow_2\rangle + \delta\, |\downarrow_1\rangle\, |\downarrow_2\rangle,$$

donde

$$|\uparrow_i\rangle = | 1/2 \;\; 1/2\rangle_i, \qquad |\downarrow_i\rangle = | 1/2 \;\; -1/2\rangle_i, \qquad i = 1, 2$$

siendo i el índice que etiqueta a ambas partículas. Demuestre lo siguiente

(a) La probabilidad de medir simultáneamente la partícula 1 con spin up a lo largo del eje y y la partícula 2 con spin up a lo largo de eje z es simplemente

$$P(\uparrow_y, \uparrow_z) = \frac{1}{2}|\alpha - i\gamma|^2,$$

(b) La probabilidad de medir a la partícula 2 con spin down a lo largo de eje x está dada por

$$P(\downarrow_x, \{\uparrow, \downarrow\}) = \frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2 + \frac{1}{2}|\gamma - \delta|^2,$$

Relaciones de conmutación

Demuestre que si uno trabaja con un sistema de dos partículas y define el operador vectorial de spin como

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{(2)},$$

siendo $\boldsymbol{S}^{(i)}$ el operador vectorial de spin de la partícula i-ésima ($i = 1, 2$), entonces se cumplen las siguientes reglas de conmutación

$$[S^2, \boldsymbol{S}^{(1)}] = 2i\hbar \left(\boldsymbol{S}^{(1)} \times \boldsymbol{S}^{(2)}\right), \qquad [S^2, \boldsymbol{S}^{(2)}] = -2i\hbar \left(\boldsymbol{S}^{(1)} \times \boldsymbol{S}^{(2)}\right),$$

donde $S^2 = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}$. Para esta demostración le será útil usar las realciones de conmutación

$$[S_i^{(\lambda)}, S_j^{(\lambda)}] = i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k^{(\lambda)}, \qquad \{S_i^{(\lambda)}, S_j^{(\lambda)}\} = 2\hbar^2 \delta_{ij} \mathbb{1},$$

para $\lambda = 1, 2$. También le será útil saber que la contracción de un tensor antisimétrico con un tensor simétrico siempre es nula, por ejemplo

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0,$$

siendo ε_{ijk} el tensor de Levi-Civita (antisimétrico) y δ_{jk} el tensor de Delta de kronecker (simétrico).

Coeficientes de Clebsch-Gordan

Suponga que se tiene un sistema de dos partículas, donde la primera partícula posee spin 1/2, vale decir, $s_1 = 1/2$ y que no sabemos nada acerca del spin de la segunda partícula, al cual le llamaremos simplemente s_2. Supongamos que estamos analizando el estado $\mid s \;\; m\rangle$ definido como

$$\mid s \;\; m\rangle = A \mid 1/2 \;\; 1/2\rangle \mid s_2 \;\; (m-1/2)\rangle + B \mid 1/2 \;\; -1/2\rangle \mid s_2 \;\; (m+1/2)\rangle$$

usando la ecuación de autovalores

$$S^2 \mid s \;\; m\rangle = \hbar^2 s(s+1) \mid s \;\; m\rangle,$$

sabiendo que

$$S^2 = \left(S^{(1)}\right)^2 + \left(S^{(2)}\right)^2 + 2\boldsymbol{S}^{(1)} \cdot \boldsymbol{S}^{(2)},$$

y que los operadores de subida y bajada actúan de la siguiente manera

$$S_\pm \mid s \;\; m\rangle = \hbar^2 \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} \mid s \;\; (m \pm 1)\rangle,$$

con $S_\pm = S_x \pm i S_y$, entonces deduzca que

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2 + 1}}, \qquad B = \sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2 + 1}},$$

Hamiltoniano de la interacción dipolar

Dos partículas de spin 1/2 están separadas a una distancia $\boldsymbol{a} = a\hat{z}$ e interactúan solamente a través de la energía dipolar magnética

$$H = \frac{\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2}{a^3} - 3\frac{(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \boldsymbol{a})}{a^5},$$

donde $\boldsymbol{\mu}_j$ $(j = 1,2)$ es el momento magnético de la partícula j-ésima $(j = 1,2)$. El sistema de dos spines consiste en autoestados de los operadores S^2 y S_z.

(a) Usando la relación $\boldsymbol{\mu}_j = -\gamma \boldsymbol{S}_j$ y las identidades

$$\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 = \frac{1}{2}\left(S^2 - \left(S^{(1)}\right)^2 - \left(S^{(2)}\right)^2\right), \qquad S_z^{(1)} S_z^{(2)} = \frac{1}{2}\left(S_z^2 - \left(S_2^{(1)}\right)^2 - \left(S_z^{(2)}\right)^2\right),$$

y sabiendo que

$$\begin{aligned} S^2 \mid s \;\; m\rangle &= \hbar^2 s(s+1) \mid s \;\; m\rangle \\ S_z \mid s \;\; m\rangle &= \hbar m \mid s \;\; m\rangle \end{aligned}$$

deduzca que para el caso $s_1 = s_2 = 1/2$ el Hamiltoniano del sistema puede escribirse como

$$H = \frac{\gamma^2}{2a^3}\left(S(S+1) - 3S_z^2\right),$$

(b) Encuentre las autoenergías de los estados tripletes ($\mid 1 \;\; 1\rangle$, $\mid 1 \;\; 0\rangle$ y $\mid 1 \;\; -1\rangle$) y para el estado singlete $\mid 0 \;\; 0\rangle$.

(c) Encuentre la función de onda para todo instante de tiempo suponiendo que inicialmente el estado del sistema es $\frac{1}{\sqrt{4}}(\mid 1\ \ 1\rangle + \mid 1\ \ 0\rangle + \mid 1\ \ -1\rangle + \mid 0\ \ 0\rangle)$, para ello use la expansión

$$\mid \chi(t)\rangle = \sum_{\substack{s=0,1 \\ m=-s,...,s}} \alpha_{sm} \mid s\ \ m\rangle e^{-\frac{iE_{sm}t}{\hbar}}, \qquad \alpha_{sm} \in \mathbb{C},$$

en donde E_{sm} es la autoenergía correspondiente al estado $\mid s\ \ m\rangle$, la cual fue hallada en (b). Se suele usar la representación

$$\begin{aligned} \mid 1\ \ 1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mid 1\ \ 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mid 1\ \ -1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mid 0\ \ 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Medición simultánea en un sistema de dos spines

Suponga que tiene dos partículas de spin 1/2 y que ambas se encuentran en el estado singlete. Sean

$S_a^{(1)}$: el operador de spin de la partícula 1 a lo largo de eje $\hat{a}$

$S_b^{(2)}$: el operador de spin de la partícula 2 a lo largo de eje $\hat{b}$

si $\theta = \measuredangle(\hat{a}, \hat{b})$, entonces demuestre que

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\cos\theta,$$