Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física

FIZ 0412 Mecánica Cuántica
Profesor: Max Bañados
Ayudantes: Ariel Norambuena ***ainoramb@uc.cl***

Guía 1: Spin

23 de Marzo de 2013

1. Operadores de spin

Demuestre las siguientes propiedades

(a) Construya la matriz S_r, que corresponde al operador de spin a lo largo del eje $\hat{r}$, siendo

$$\hat{r} = \cos\theta \sin\phi \; \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \; \hat{y} + \cos\theta \; \hat{z}$$

demuestre que los autovectores de este operador están dados por

$$| \, \chi_r^+ \rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \qquad | \, \chi_r^- \rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

(b) Construya la representación matricial de los operadores S_x, S_y y S_z para una partícula de spin 1.

(c) Dado un estado de spin general

$$| \, \chi(t) \rangle = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}, \qquad |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = 1$$

encuentre una expresión general para $\langle \boldsymbol{S}(t) \rangle$ y muestre que que cada componente del valor de expectación es un número real.

2. Propiedades de las matrices de Pauli

Para los siguientes problemas considere que $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{M}$ es una matriz arbitraria de 2×2.

(a) Dado que $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \mathbb{1}\}$ forman una base para el espacio de todas las matrices de 2×2, entonces

$$\mathbb{M} = a_0 \mathbb{1} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \qquad \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

demuestre que

$$a_0 = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left(\mathbb{M} \right), \qquad \boldsymbol{a} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left(\boldsymbol{\sigma} \mathbb{M} \right)$$

(b) Muestre que si U es una matriz unitaria de 2×2, entonces siempre puede escribirse como

$$U = e^{i\gamma + i\omega \hat{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}$$

donde $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$ y $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ es un vector unitario.

(c) Dado dos vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, entonces siempre se cumple que

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbb{1}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

3. Dinámica de spin

Considere electrón que está inmerso en una región con un campo magnético de la forma $\boldsymbol{B} = B_1\hat{x}$, siendo B_1 una constante. Considere que el momentum angular de la partícula está congelado.

(a) Encuentre la expresión matricial para el Hamiltoniano del sistema.

(b) Si inicialmente la partícula es medida con spin up a lo largo del eje y, entonces encuentre la función de onda de spin en cualquier instante de tiempo. Para esto considere que la función de onda de spin $\mid \chi(t)\rangle$ puede expandirse en términos de sus estados estacionarios

$$\mid \chi(t)\rangle = Ae^{-\frac{i}{\hbar}E_+ t} \mid \chi_x^+\rangle + Be^{-\frac{i}{\hbar}E_- t} \mid \chi_x^-\rangle$$

siendo $\mid \chi_x^\pm\rangle$ y $E_\pm$ los autovectores y autovalores del operador Hamiltoniano, respectivamente.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de medir el electrón con spin down a lo largo de eje $\frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2})$?. Para este cálculo puede utilizar el resultado (a) del problema 1 usando $\theta = \phi = \pi/4$.

4. Rotaciones en el espacio de spin y euclideano

(a) Demuestre que dado un operador $\mathbb{A} = a_0\mathbb{1} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, siempre se cumple que

$$e^{\frac{i}{2}\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}}\mathbb{A}e^{-\frac{i}{2}\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}} = a_0\mathbb{1} + (\boldsymbol{a}\cdot\sigma)\cos\theta - \boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{n}\times\boldsymbol{a})\sin\theta + 2\sin^2(\theta/2)(\hat{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{a}\cdot\hat{n})$$

para ello primero ocupe la identidad

$$e^{i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{1}\cos|\boldsymbol{a}| + i(\hat{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin|\boldsymbol{a}|$$

y luego use la identidad demostrada en el problema 2 (c). Usando lo demostrado verifique que se satisface la relación

$$e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_z}S_z e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_z} = \cos\theta S_x - \sin\theta S_y$$

para ello tome elija $\mathbb{A} = S_z$, es decir, $a_0 = 0$ y $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$.

(b) Si es que miramos con detalle el resultado anterior, es decir

$$e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_z}S_z e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_z} = \cos\theta S_x - \sin\theta S_y$$

nos daremos cuenta de que corresponde a un caso particular de la transformación que relaciona rotaciones en el espacio de spin y el espacio ecuclideano $\mathbb{R}^3$, la cual como vieron en clases está dada por

$$e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{L}}\boldsymbol{S} = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{S}}\boldsymbol{S}e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{S}} \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\hat{n}$, $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{S}$ son los operadores vectoriales de momentum angular orbital y spin, respectivamente. En clases se demostró que para $|\alpha| \ll 1$, a primer orden en α se obtenía la siguiente regla de conmutación

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{L})\,\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}]$$

realizando el mismo procedimiento visto en clases encuentre una relación a segundo orden en α.