Momento angular en mecánica cuántica

1. (a) Utilizando la expresión

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{i}\left(\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

   encuentre las relaciones de commutación de $\vec{L}$.

   (b) Demuestre con detalle que si $V(r)$ es solo una función del radio r, entonces $[V, \vec{L}] = 0$ y también $[V, \vec{L}^2] = 0$

   (c) Usando $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ junto con $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ demuestre que $[\vec{L}, \vec{p}^2] = 0$.

2. Considere $Y_{\ell,\ell}(\theta,\phi) = C\sin^{\ell}\theta\, e^{i\ell\phi}$. Demuestre que $L_+Y_{\ell,\ell} = 0$. Construya $Y_{\ell,\ell-1}(\theta,\phi)$ y $Y_{\ell,\ell-2}(\theta,\phi)$ aplicando L_-. Determine la constante de normalización en cada caso.

3. Considere las funciones $f_1 = \cos\theta, f_2 = \sin^2\theta, f_3 = \sin\theta\cos\phi$. Escriba estas tres funciones como combinaciones lineales de armónicos esféricos.

4. Escriba la ecuación diferencial

$$\vec{L}^2 f(\theta,\phi) = \lambda f(\theta,\phi)$$

   Asumiendo que $f(\theta,\phi) = \Theta(\theta)e^{im\phi}$, y mediante el cambio de variable $u = \cos\theta$, demuestre que se obtiene la ecuación de los polinomios asociados de Legendre.

5. (a) (Difícil) Demuestre que si $\theta = \pi/2$, entonces

$$e^{\frac{i}{\hbar}\theta L_z}\hat{x}e^{-\frac{i}{\hbar}\theta L_z} = \hat{y}$$

   Interprete geométricamente esta relación.

   (b) (Fácil) Calcule el lado izquierdo de la ecuación anterior para un ángulo infinitesimal θ e interprete su resultado.

6. Considere un Hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{1}{2I_1}(L_x^2 + L_y^2) + \frac{1}{2I_2}L_z^2$$

correspondiente a un objeto que rota con un punto fijo. Encuentre las autoenergías y su degeneración.

7. Construya explícitamente las autofunciones del átomo de hidrógeno

   (a) $\varphi_{1,0,0}$

   (b) $\varphi_{2,0,0}$

   (c) $\varphi_{2,1,-1}$

   (d) $\varphi_{2,1,0}$

   (e) $\varphi_{2,1,1}$

   explicitando la degeneración en cada caso.