Guia 4. Oscilador armónico, estados coherentes y Teorema de Ehrenfest

1. Considere un oscilador armónico de frecuencia ω. En un instante $t = 0$ se mide un observable $\mathcal{O}$, que tiene autovectores $|\lambda_n\rangle$ y autovalores λ_n. Como resultado de la medición se encuentra el autovalor λ_n. Luego el sistema evoluciona libremente hasta un tiempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

cuando se mide nuevamente el mismo observable.

   (a) Determine la probabilidad de que se observe el mismo autovalor λ_n. Discuta el resultado.

   (b) Discuta esta situación cuando el observable es la posición $\hat{x}$.

2. Considere los estados coherentes $|\alpha_0\rangle = N e^{\alpha_0 a^\dagger}|0\rangle$.

   (a) Determine la constante N de modo que

$$\langle\alpha_0|\alpha_0\rangle = 1$$

   (b) Calcule $\langle\alpha_0|\alpha_0'\rangle$ para los estados normalizados.

   (c) (Mas difícil, pero no imposible!) Demuestre que $|\alpha_0\rangle$ ($\alpha_0 \in C$) forma un conjunto completo.

3. Demuestre que los estados coherentes saturan la desigualdad de Heisenberg. Es decir,

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

4. Determine

$$\langle H(p,x)\rangle - H(\langle p\rangle, \langle x\rangle),$$

para estados coherentes. Interprete su resultado.

5. Calcule $\Delta p \Delta x$ para la base de estados estacionarios $|n\rangle$. Demuestre que el estado fundamental satura la desigualdad de Heisenberg.

6. (a) Aplique el teorema de Ehrenfest a los operadores $a, a^\dagger$ y encuentre como evolucionan en el tiempo los promedios $\langle a\rangle, \langle a^\dagger\rangle$. Considere un estado $|\psi(t)\rangle$ arbitrario.

   (b) Construya $\langle x\rangle, \langle p\rangle$ en términos de $\langle a\rangle, \langle a^\dagger\rangle$ obtenidos en (a) y verifique que se obtiene la evolución clásica.

   (c) Demuestre la identidad

   $$e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} a e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = a e^{iwt}$$

   Utilize esta identidad para calcular $\langle\psi|a|\psi\rangle$ y verifique los resultados de la parte (a). Ayuda: Recuerde que $[H,a] = -h\bar{w}\,a$. Demuestre de aquí $H^n a = a(H-\hbar w)^n$.

7. Considere los operadores $\mathcal{O}_1 = x^2, \mathcal{O}_2 = p^2, \mathcal{O}_3 = xp+px$. Usando el teorema de Ehrenfest encuentre $\langle\mathcal{O}_1\rangle$, $\langle\mathcal{O}_2\rangle$ y $\langle\mathcal{O}_3\rangle$ en función del tiempo. Asuma aquí un estado arbitrario $|\psi(t)\rangle$.