Pontificia Universidad Católica de Chile - Facultad de Física
QM I - FIZ0322

Guía 3 de Ejercicios

Profesor: Max Bañados

Ayudante : Nicolás Pérez (nrperez@uc.cl)
Facultad de Física UC

Notación de Dirac

1. **Formalismo de Dirac con un problema de dos estados.** Consideren dos autoestados normalizados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ de un hamiltoniano $\widehat{H}$ correpondientes a diferentes autovalores E_1 y E_2 (uno puede elegir $E_1 - E_2 = \hbar\omega$).

   (a) Muestre que $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son ortogonales.

   (b) Considere el estado $|\psi_2\rangle = \{|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle\}/\sqrt{2}$, calcule el valor de expectación $\langle E\rangle$ de la energía y la dispersión ΔE en este estado.

   (c) Asuma que en $t = 0$ el sistema está en el estado $|\psi(t = 0)\rangle = |\psi_-\rangle$. ¿Cuál es el estado del sistema $|\psi(t)\rangle$ en un tiempo t?

   (d) Considere un observable $\widehat{A}$ definido como $\widehat{A}|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$, y $\widehat{A}|\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle$. ¿Cuáles son los autovalores a de $\widehat{A}$ en el subespacio generado por $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$?

   (e) Construya las combinaciones correspondientes de $|\psi_1\rangle$ y ψ_2, que son autovectores de $\widehat{A}$.

   (f) Asuma que en $t = 0$ el sistema está en el estado $|\psi_-\rangle$ correspondiente al autovalor $a = -1$. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar $a = -1$ en una medición de A un tiempo t más tarde?

2. Pruebe que para un operador hermítico A,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\phi^*(x)A\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx(A\phi(x))^*\psi(x)$$

   Hint: Utilice $\Phi = \phi + \lambda\psi$ en la siguiente ecuación y use el hecho que λ es un número arbitrario complejo.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*(x)A\psi(x) = \Big[\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*(x)A\psi(x)\Big]^* = \int_{-\infty}^{\infty} dx(A\psi(x))^*\psi(x)$$

3. Pruebe que si H es un operador hermítico, entonces:

$$e^{iH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iH)^n}{n!}$$

   es hermítico conjugado de e^{-iH}.

4. Considerando que $|p\rangle$ es una base, sabemos que existen coeficientes $C(p,p')$ tal que:

$$\hat{x} = \int dp dp' C(p,p')|p\rangle\langle p|$$

Demuestre que:

(a) Los coeficientes pueden ser escritos como:

$$C(p,p') = -i\hbar \frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p)$$

(b) El operador $\hat{x}$ puede ser escrito como:

$$\hat{x} = i\hbar \int dp |p\rangle \frac{\partial}{\partial p}\langle p|$$

5. Demuestre la siguiente igualdad:

$$\langle p'|\hat{x}|p''\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial p''}\delta(p''-p')$$

6. Demuestre lo siguiente

$$e^{ia\hat{p}/\hbar}\hat{x}e^{-ia\hat{p}/\hbar} = \hat{x} + aI$$

donde I es la identidad.

7. $|\varphi_n\rangle$ son los autoestados de un operador hermítico H (H es, por ejemplo, el hamiltoniano de un sistema físico arbitrario). Asuma que los estados $|\varphi_n\rangle$ forman una base ortonormal discreta. El operador $U(m,n) = |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|$

(a) Calcule el adjunto $U^\dagger(m,n)$ de $U(m,n)$

(b) Calcule el conmutador $[H, U(m,n)]$

(c) Pruebe la relación:
$$U(m,n)U^\dagger(p,q) = \delta_{nq}U(m,p)$$

(d) Calcule $Tr\{U(m,n)\}$, la traza del operador $U(m,n)$

(e) Sea A un operador, con elementos de matriz $A_{mn} = \langle\varphi_m|A|\varphi_n\rangle$. Pruebe la relación:
$$A = \sum_{m,n} A_{mn}U(m,n)$$

(f) Muestre que $A_{pq} = Tr\{AU^\dagger(p,q)\}$

8. El espacio de estados un cierto sistema físico es 3 dimensional. Sea $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ una base ortonormal de este espacio. Los kets $|\psi_0\rangle$ y ψ_1 están definidos por:

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle \\ |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|u_3\rangle \end{aligned}$$

(a) ¿Están normalizados estos kets?

(b) Calcule las matrices ρ_0 y ρ_1 representando en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, los operadores de proyección en el estado $|\psi_0\rangle$ y en el estado $|\psi_1\rangle$. Verifique que estas matrices sean hermíticas.

9. Sea K el operador definido por: $K = |\varphi\rangle\langle\psi|$, donde $|\varphi\rangle$ y $|\psi\rangle$ son dos vectores del espacio de estado.

   (a) ¿Bajo qué condiciones K es hermítico?

   (b) Calcule K^2. ¿Bajo qué condición es K un proyector?

   (c) Muestre que K siempre puede ser escrito en la forma $K = \lambda P_1 P_2$ donde λ es una constante a ser calculada y P_1 y P_2 son proyectores.

10. Considere el Hamiltoniano H de una partícula en un problema unidimensional definido por:

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + V(X)$$

donde X y P son los operadores definidos tipicamente y que satisfacen la relación $[X, P] = i\hbar$. Los autovectores de H son denotados por $|\varphi_n\rangle$: $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$, donde n es un índice discreto.

   (a) Muestre que:

$$\langle\varphi_n|P|\varphi_{n'}\rangle = \alpha\langle\varphi_n|X|\varphi_{n'}\rangle$$

   donde α es un coeficiente que depende de la diferencia entre E_n y $E_{n'}$. Calcule α. (Hint: Considere el conmutador $[X, H]$),

   (b) Estos, deduzca, usando la relación de clausura, la ecuación:

$$\sum_{n'}(E_n - E_{n'})^2|\langle\varphi_n|X|\varphi_{n'}\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2}\langle\varphi_n|P^2|\varphi_n\rangle$$

11. Sea H el operador Hamiltoniano de un sistema físico. Denotemos por $|\varphi\rangle$ los autovectores de H, con autovalores E_n:

$$H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$$

   (a) Para un operador arbitrario A, pruebe la relación:

$$\langle\varphi_n|[A, H]|\varphi_n\rangle = 0$$

   (b) Considere un problema unidimensional, donde el sistema físico es una partícula de masa m y una energía potencial $V(X)$. En este caso, H es escrito:

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + V(X)$$

   - En términos de P, X y $V(X)$, encuentre los conmutadores: $[H, P], [H, X]$ y $[H, XP]$.
   - Muestre que el elemento de matriz $\langle\varphi_n|P|\varphi_n\rangle$ (el que interpretaremos como el valor medio del momentum en el estado $|\varphi_n\rangle$) es cero.

- Establezca una relación entre $E_k = \langle\varphi_n|\frac{P^2}{2m}|\varphi_n\rangle$ (el valor medio de la energía cinética en el estado $|\varphi_n\rangle$) y $\langle\varphi_n|X\frac{dV}{dX}|\varphi_n\rangle$. Dado que el valor medio de la energía potencial en el estado $|\varphi_n\rangle$ es $\langle\varphi_n|V(X)|\varphi_n\rangle$, como se relaciona al valor medio de la energía cinética cuando:

$$V(X) = V_0 X^{\lambda}$$

($\lambda = 2, 4, 6, ...; V_0 > 0$?)